Warszawa, 24 sierpnia 2022

dr hab. Tomasz Kochanek
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej
pana mgra Krzysztofa Maciaszka

pt. *Własność rozszerzania dla podzbiorów analitycznych w obszarach w* $\mathbb{C}^n$

1. Tematyka rozprawy doktorskiej

Tematyka rozprawy doktorskiej pana mgra Krzysztofa Maciaszka skupiona jest wokół ważnego zagadnienia wielowymiarowej analizy zespolonej, którym jest problem przedłużania ograniczonych funkcji holomorficznych na analitycznych obszarach w $\mathbb{C}^n$ z zachowaniem normy supremum. Problem ten istotnie angażuje narzędzia z innych działów matematyki takich jak teoria operatorów czy teoria funkcji niezmienniczych. Pierwsze rezultaty dotyczące własności przedłużania z zachowaniem normy supremum znajdują się w opublikowanej w 1969 roku książce W. Rudina *Function Theory in Polydiscs*, kluczowym zaś dla współczesnego rozwoju tego zagadnienia jest przełomowy artykuł J. Aglera i J.E. McCarthy'ego opublikowany w roku 2003 w *Ann. Math.*, w którym autorzy powiązali tę problematykę z teorią operatorów dostarczając nowych narzędzi i motywacji do zajmowania się problemem przedłużania. Głównym źródłem ich rozważań był problem interpolacyjny Nevanlinny-Picka na bidysku zespolonym $\mathbb{D}^2$.

Podzbiory $\mathbb{D}^2$ mające własność roszerzania z zachowaniem normy supremum zostały scharakteryzowane we wspomnianej pracy Aglera i McCarthy'ego, natomiast w przypadku tzw. *zsymetryzowanego bidysku* $\mathbb{G} \subset \mathbb{C}^2$ przez Aglera, Z. Lykovą i N. Younga (*Memoirs Amer. Math. Soc.* 2019). Warto zaznaczyć, że dla trzydysku $\mathbb{D}^3$ na ogół jest trudno rozstrzygnąć czy zadany podzbiór analityczny $V \subset \mathbb{D}^3$ ma własność rozszerzania. Ważną w tym kontekście klasę tworzą pewne dwuwymiarowe powierzchnie wprowadzone w pracy Ł. Kosińskiego i W. Zwonka (*Canad. J. Math.* 2021), których ciekawą własność doktorant wykazuje w rozdziale drugim rzucając w ten sposób nowe światło na problem rozszerzania w $\mathbb{D}^3$.

Dalsza część rozprawy dotyczy ogólnego pytania o to, na ile własność rozszerzania implikuje, że dany zbiór jest holomorficznym retraktem. Pytanie to jest motywowane podstawową obserwacją: każdy holomorficzny retrakt ma własność rozszerzania z zachowaniem normy. Doktorant dowodzi kilku interesujących i dalece nietrywialnych twierdzeń dających odpowiedź na to pytanie w różnych sytuacjach.

Rozprawa oparta jest na trzech artykułach naukowych, których jedynym autorem jest doktorant. Dwa z nich zostały już opublikowane w czasopismach *Complex Anal. Oper. Theory* oraz *Arch. Math.*, natomiast trzeci jest udostępniony w systemie arXiv. Przejdę teraz do bardziej szczegółowego omówienia wyników przedstawionych w rozprawie.

Ho

2. Główne tezy rozprawy

Pierwszy rozdział rozprawy ma charakter wprowadzający – podane zostały w nim niezbędne definicje i fakty dotyczące zbiorów analitycznych, algebraicznych, a także różnego rodzaju (pseudo)odległości pojawiających się w teorii funkcji niezmienniczych. Przytoczone jest klasyczne twierdzenie Cartana o przedłużaniu wraz z przykładem Alexandera pokazującym, że nie każda ograniczona funkcja holomorficzna określona na podzbiorze algebraicznym $\mathbb{D}^2$ przedłuża się do ograniczonej funkcji holomorficznej na $\mathbb{D}^2$. Kluczowa dla całej rozprawy jest definicja własności rozszerzania względem podalgebry $H^\infty(V)$, gdzie V jest podzbiorem $\mathbb{C}^n$, jak również definicja zbiorów $H^\infty(\Omega)$-wypukłych i zbiorów wielomianowo wypukłych. Warto zaznaczyć, że pomysłowy przykład ze str. 11, pokazujący, że jednowymiarowe rektrakty $\mathbb{D}^2$ nie muszą być wielomianowo wypukłe, pochodzi z artykułu [Kos-M^{c}C] Kosińskiego i M^{c}Carthy'ego, gdzie podany jest szkic dowodu, jednak autor rozprawy podaje pełne i szczegółowe wytłumaczenie tego przykładu.

Rozdział drugi oparty jest na pracy

[Mac3] K. Maciaszek, *Geometry of uniqueness varieties for a three-point Pick problem in* $\mathbb{D}^3$ (2022), `arXiv:2204.06612`

i dotyczy trzypunktowego problemu Picka na trzydysku zespolonym $\mathbb{D}^3$, a dokładniej – pewnych dwuwymiarowych powierzchni algebraicznych $M_\alpha \subset \mathbb{D}^3$ ($\alpha \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$). Powierzchnie te pojawiły się w artykule [Kos-Zw] Kosińskiego i Zwonka, gdzie wykazano m.in. że są one zbiorami Carathéodory'ego, na których zgadzają się pseudoodległości Carathéodory'ego c_{M_α} i $c_{\mathbb{D}^3}$ oraz funkcja Lemperta. Autorzy pracy [Kos-Zw] wykazali również, że rodzina $\{M_\alpha\}$ jest stabilna ze względu na automorfizmy $\mathbb{D}^3$. W głównym wyniku rozdziału drugiego rozprawy pan mgr Maciaszek dowodzi, że stabilność ta zachodzi w silniejszym sensie. Mówiąc precyzyjnie, jeżeli

$$M_\alpha = \left\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{D}^3 \colon \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = \overline{\alpha}_1 z_2 z_3 + \overline{\alpha_2} z_1 z_3 + \overline{\alpha_3} z_1 z_2\right\}$$

dla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz

$$(*) \qquad |\alpha_{i_1}| + |\alpha_{i_2}| > |\alpha_{i_3}|$$

dla każdej permutacji (i_1, i_2, i_3) zbioru $\{1, 2, 3\}$ (w przeciwnym razie M_α jest biholomorficzny z $\mathbb{D}^2$, jest zatem retraktem $\mathbb{D}^3$), to istnieje takie $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}^3)$, że $\varphi(M_\alpha) = M_{(1,1,1)}$. Dowód tego twierdzenia jest techniczny i dość skomplikowany, ale niewątpliwym profitem jest obserwacja poczyniona przez autora mówiąca, że przytoczone twierdzenie o stabilności redukuje badanie własności rozszerzania elementów rodziny $\mathcal{M}$ (zbiorów M_α spełniających $(*)$) do zbadania tej własności dla jednego wybranego zbioru $M_\alpha \in \mathcal{M}$.

Pan mgr Maciaszek pokazuje następnie, że rodzina $\mathcal{M}$ składa się ze zbiorów jedyności (tzn. takich zbiorów, na których pokrywają się wszystkie funkcje interpolujące odpowiedni problem Picka) dla ekstremalnych, niezdegenerowanych, ściśle trójwymiarowych trzypunktowych problemów Picka w $\mathbb{D}^3$. Dowód wymaga użycia tzw. *funkcji magicznej* wprowadzonej w pracy [Agl-You] Aglera i Younga, a także bardzo skomplikowanych rachunków, do których użyto programu *Mathematica*. Rozdział kończy się elegancką obserwacją (z kolejnym zastosowaniem twierdzenia o stabilności rodziny $\mathcal{M}$ względem automorfizmów $\mathbb{D}^3$) mówiącą, że brzegiem Szyłowa powierzchni $M_\alpha \in \mathcal{M}$ względem algebry funkcji ciągłych na $\overline{M}_\alpha$ i holomorficznych na M_α jest zbiór $\overline{M}_\alpha \cap \mathbb{T}^3$.

W rozdziale trzecim zaprezentowane są wyniki z artykułu

[Mac] K. Maciaszek, *On polynomial extension property in N-disc*, Complex Anal. Oper. Theory 13 (2019), 2771–2780.

Głównym wynikiem tego rozdziału jest twierdzenie orzekające, że każdy jednowymiarowy zbiór algebraiczny $V \subset \mathbb{D}^n$, gdzie $n \geqslant 3$, mający własność wielomianowego rozszerzania jest holomorficznym retraktem. Rezultat ten znakomicie wpisuje się w nurt badań wiążących własność H^∞-rozszerzania z holomorficznymi retraktami. Jednym z takich wyników jest twierdzenie z pracy [Gu-Hu-Wa] Guo, Huanga i Wanga, zacytowane w rozprawie jako twierdzenie 24, które przy pewnych założeniach charakteryzuje holomorficzne retrakty V wśród zbiorów algebraicznych jako te, które mają własność H^∞-rozszerzania i spełniają dodatkowy warunek istnienia „rozszerzającej" izometrii liniowej $T\colon H^\infty(V) \to H^\infty(\mathbb{D}^n)$. Twierdzenie pana mgra Maciaszka pozwala pominąć to dodatkowe założenie w sytuacji, gdy V jest zbiorem jednowymiarowym. Twierdzenie to jest również jednowymiarowym odpowiednikiem sytuacji opisanej w twiedzeniu Kosińskiego-M^{c}Carthy'ego [Kos-M^{c}C; Thm. 6.1], które mówi, że jeżeli V jest wielomianowo wypukłym dwuwymiarowym podzbiorem analitycznym $\mathbb{D}^3$ z własnością rozszerzania, to V jest holomorficznym retraktem lub przedstawia się jako wykres funkcji holomorficznej określonej na podobszarze $\mathbb{D}^2$ ze względu na każdą z trzech możliwych par współrzędnych (z_{i_1}, z_{i_2}) $(1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant 3)$.

Rozdział czwarty oparty jest na wynikach pracy

[Mac2] K. Maciaszek, *Polynomial extension property in the classical Cartan domain $\mathcal{R}_{II}$*, Arch. Math. 115 (2020), 657–666.

Jak pisze autor, rozdział ten jest „nieco odrębny od wcześniejszych", jednak główny wynik ma podobną naturę jak ten z poprzedniego rozdziału – w pewnych sytuacjach własność rozszerzania implikuje istnienie holomorficznej retrakcji. W tym przypadku mowa jest o algebraicznych podzbiorach obszaru Cartana

$$\mathcal{R}_{II} = \left\{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})\colon A = A^T,\ I - AA^* > 0\right\}$$

(pojawiającego się jako jeden z czterech obszarów w twierdzeniu Cartana), a wynik uzyskany przez doktoranta jest bardzo elegancki: jeżeli $V \subset \mathcal{R}_{II}$ jest zbiorem algebraicznym z własnością wielomianowego rozszerzania, to V jest holomorficznym retraktem. Autor tłumaczy również ciekawą ideologię stojącą za tym twierdzeniem – obszar $\mathcal{R}_{II}$ jest dla *tetrabloku*

$$\mathbb{E} = \left\{(z_{11}, z_{22}, \det z)\colon z = (z_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 2} \in \mathcal{R}_{II}\right\}$$

tym, czym bidysk dla *zsymetryzowanego bidysku*

$$\mathbb{G} = \left\{(z + w, zw)\colon |z| < 1,\ |w| < 1\right\},$$

na temat którego daleko idące badania można znaleźć w pracy [Ag-Ly-Yo] Aglera, Lykovej i Younga (*Memoirs Amer. Math. Soc.* 2019), m.in. fakt mówiący, że istnieją podzbiory $\mathbb{G}$ z własnością H^∞-rozszerzania niebędące holomorficznymi retraktami $\mathbb{G}$. Wynik pana mgra Maciaszka zawarty w czwartym rozdziale jest z pewnością istotnym krokiem na drodze do zrozumienia problemu rozszerzania dla podzbiorów $\mathbb{E}$, o którym – jak słusznie zauważa doktorant – nie wiemy obecnie wiele więcej niż to, że istnieją w nim pewne „anomalie", czyli własność rozszerzania dla zbiorów niebędących holomorficznymi retraktami (wynika to ze wspomnianego wyżej twierdzenia Aglera-Lykovej-Younga w połączeniu z lematem 35, tj. [Ag-Ly-You; Lemma 15.1]).

3. Ocena rozprawy

Zawartość merytoryczną rozprawy doktorskiej pana mgra Maciaszka oceniam bardzo wysoko. Rozprawa dowodzi matematycznej dojrzałości autora i wysokiej biegłości w posługiwaniu się dość skomplikowanymi narzędziami wielowymiarowej analizy zespolonej. Dowód każdego z omówionych wyżej wyników doktoranta jest dalece nietrywialny i mocno złożony pod względem technicznym. Rozprawa niewątpliwie świadczy o tym, że badania prowadzone przez pana mgra Krzysztofa Maciaszka były dobrze przemyślane, a stawiane pytania dobrze wpisują się w aktualny nurt badań. Można powiedzieć, że stanowią one istotną część pewnego szerszego projektu, którego centralnym problemem jest pytanie o to kiedy własność H^∞-rozszerzania implikuje, że dany zbiór jest holomorficznym retraktem. Jest to oczywiście w ogólności pytanie bardzo trudne. Można np. wspomnieć, jak zaznacza autor w dodatku A, że jedynym ogólnym przypadkiem, gdy taką konkluzję potrafimy otrzymać niezależnie od wymiaru jest twierdzenie Kosińskiego–M^{c}Carthy'ego z pracy [Kos-M^{c}C2] (*Trans. Amer. Math. Soc.* 2019) – działa ono dla relatywnie wielomianowo wypukłych podzbiorów kuli jednostkowej $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Docenić należy niewątpliwie samodzielność doktoranta – rozprawa oparta jest na trzech jednoautorskich artykułach naukowych. Dobrze oceniam również stronę redakcyjną rozprawy. Poniżej podaję listę kilku drugorzędnych usterek, które nie rzutują na ocenę merytoryczną.

- Kilka pozycji z bibliografii nie jest cytowanych, np. [Agl-You2], [Ale-Wer], [Mac2].
- W niektórych miejscach brakuje dokładnej informacji skąd pochodzi dane twierdzenie czy przykład, np. brak w tekście rozdziału czwartego odniesienia do pracy [Mac2]; podobna uwaga może dotyczyć przykładu ze str. 11.
- Brak konsekwencji w stosowaniu skrótów nazw czasopism, np. przy pracach [Agl-M^{c}C2] i [Mac2].
- Twierdzenie 25 nie jest precyzyjnie zacytowane; teza twierdzenia [Kos-McC; Thm. 6.1] mówi, że jeżeli V nie jest holomorficznym retraktem, to jest wykresem funkcji holomorficznej względem dowolnego zestawu zmiennych, a nie tylko po jednej „ewentualnej permutacji".
- Zamiast „skończona ilość" (funkcji, składowych) powinno być: „skończona liczba" (zob. str. 9 i 13).
- Str. 13: „pierścień noetherowski".
- Str. 40: „To kończy dowód twierdzenia 26."
- Str. 41: literówki przy oznaczeniach wymiaru ($p = q = n$).

4. Konkluzja

Uważam, że przedstawiona mi do oceny rozprawa doktorska pana mgra Krzysztofa Maciaszka zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego oraz spełnia wymagania ustawowe, opisane w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, jak i wymagania zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim.

Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie pana mgra Krzysztofa Maciaszka do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Proponuję także, aby Komisja Doktorska rozważyła możliwość wyróżnienia rozprawy.

Tomasz Kochanek
Tomasz Kochanek