Prof. dr hab. Stanisław Spodzieja
Katedra Funkcji Analitycznych
i Równań Różniczkowych,
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Łódź, 26 września 2022 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Krzysztofa Maciaszka pod tytułem "Własność rozszerzania dla podzbiorów analitycznych w obszarach w $\mathbb{C}^n$"

Tematyka rozprawy mieści się w klasycznej Analizie Wielu Zmiennych Zespolonych, Geometrii Analitycznej Zespolonej, Teorii Metryk i Odległości Niezmienniczych, a także zachacza o Teorię Operatorów. Motywem przewodnim jest własność rozszerzania funkcji holomorficznych i ograniczonych, zdefiniowanych na analitycznych podzbiorach obszarów w $\mathbb{C}^n$ na ten obszar z zachowaniem holomorficzności i normy supremum modułu. Dokładniej, oznaczmy przez $H^\infty(X)$ zbiór wszystkich funkcji holomorficznych i ograniczonych na zbiorze $X \subset \mathbb{C}^n$, $X \neq \emptyset$. Przez $|| \cdot ||_{H^\infty(X)}$ oznaczamy normę supremum w $H^\infty(X)$, to jest $||f||_{H^\infty(X)} = \sup_{z\in X} |f(x)|$ dla $f \in H^\infty(X)$. Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym, niech $V \subset \Omega$ będzie podzbiorem analitycznym i niech $f : V \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną. Funkcję $F : \Omega \to \mathbb{C}$ nazywamy *przedłużeniem* lub *rozszerzeniem* funkcji f, gdy $F|_V = f$. Jeśli dodatkowo $f \in H^\infty(V)$, $F \in H^\infty(\Omega)$ i $||F||_{H^\infty(\Omega)} = ||f||_{H^\infty(V)}$, to funkcję F nazywamy *przedłużeniem funkcji f z zachowaniem normy.* Jeśli $\mathcal{A}$ jest podalgebrą $H^\infty(V)$, to mówimy, że zbiór V ma *własność $\mathcal{A}$-rozszerzania względem* Ω, gdy dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{A}$ istnieje jej rozszerzenie $F \in H^\infty(\Omega)$ z zachowaniem normy. Podstawowymi problemami związanymi z tymi pojęciami jest istnienie rozszerzenia ograniczonego danej funkcji $f \in H^\infty(V)$ na cały obszar Ω, istnienia takiego rozszerzenia funkcji f z zachowaniem normy oraz podanie warunków na zbiór V oraz obszar Ω dla których problemy rozszerzania i rozszerzania z zachowaniem normy mają rozwiązanie dla każdej funkcji f z pewnej podalgebry $\mathcal{A}$ algebry $H^\infty(V)$. Są to problemy trudne, leżą one w kręgu zainteresowań wielu matematyków, między innymi: J. Aglera, H. Aleksandera, K. Guo, H. Huanga, J.E. M^{c}Carthy'ego, Ł. Kosińskiego, W. Rudina, K. Wang i W. Zwonka. Badania te odgrywają ważną rolę w Teorii Funkcji Niezmienniczych, Teorii Operatorów, Teorii Sterowania i w Geometrii Analitycznej Zespolonej.

Istotny wpływ na rozwój tego kierunku badań miała praca J. Aglera i J.E. M^{c}Carthy'ego, gdzie autorzy pokazali, że w bidysku zespolonym $\mathbb{D}^2$ posiadanie przez dany zbiór V własności rozszerzania jest równoważne z tym, że zbiór V jest zbiorem von Neumanna. Zbiory te zostały omówione w dodatku B rozprawy. W szczególności pokazali, że jeśli $V \neq \mathbb{D}^2$ i $\#V > 1$ i jest to zbiór relatywnie wielomianowo wypukły, to zbiór V jest wykresem funkcji holomorficznej $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, w szczególności jest holomorficznym retraktem. Duża część pracy doktorskiej Pana Maciaszka dotyczy przeniesienia tych wyników na przypadek

n-wymiarowy.

Praca doktorska obejmująca 60 stron, składa się z sześciu rozdziałów (w tym dwa są dodatkami), opatrzona jest wstępem, spisem symboli, indeksem i bibliografią. We wstępie Autor dość dobrze umiejscawia tematykę pracy. Wskazuje tu problemy, które chce rozwiązać, nawiązuje do znanych wyników i opisuje strukturę pracy.

W rozdziale pierwszym omawia pojęcia i ich własności potrzebne do zrozumienia dalszej części pracy takie jak: pojęcie *zbioru analitycznego* i jego *wymiaru*, pojęcie *funkcji holomorficznej* na podzbiorze przestrzeni $\mathbb{C}^n$, przytacza twierdzenie Cartana o rozszerzaniu funkcji holomorficznych na podzbiorze analitycznym obszaru pseudowypukłego i przykład Aleksandera, że twierdzenie Cartana nie zachodzi w klasie funkcji ograniczonych w bidysku. Omawia pojęcie własności $\mathcal{A}$-rozszerzania zbioru V względem obszaru Ω i wielomianowego rozszerzania, gdy $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$, pojęcie holomorficznego retraktu, $H^\infty(\Omega)$-wypukłości zbioru $V \subset \Omega$ i wielomianowej wypukłości. Podaje też przykład jednowymiarowego retraktu na bidysku zespolonym, który nie jest wielomianowo wypukły. W rozdziale tym Autor omawia również pojęcie (pseudo)odległości niezmienniczych Poincarégo, Carathéodory'ego, Kobayashiego i podstawowe ich własności oraz pojęcie geodezyjnej zespolonej, funkcji ekstremalnej Carathéodory'ego-Picka i zbioru Carathéodory'ego (wprowadzone przez Kosińskiego i Zwonka). Definiuje tutaj również pewną klasę podrozmaitości algebraicznych w trzydysku zespolonym, wprowadzoną przez Kosińskiego i Zwonka w kontekście badania trzypunktowego problemu Picka na trzydysku zespolonym,

$$M_\alpha = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{D}^3 : \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = \overline{\alpha_1} z_1 + \overline{\alpha_2} z_2 + \overline{\alpha_3} z_3\},$$

dla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$. *Problem Picka* polega na rostrzygnięciu, czy przy zadanych $x, y, z \in \mathbb{D}^3$ oraz $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{D}$ istnieje funkcja holomorficzna i ograniczona na domkniętej kuli jednostkowej taka, że $F(x) = \alpha$, $F(y) = \beta$ i $F(z) = \gamma$.

W rozdziale drugim Autor koncentruje się na badaniu zbiorów M_α. Wiadomo, że jeśli $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ i $|\alpha_1| + |\alpha_2| \leq |\alpha_3|$, to zbiór M_α jest biholomorficzny z $\mathbb{D}^2$ i w konsekwencji jest retraktem trzydysku $\mathbb{D}^3$. Wobec tego Autor koncentruje się na klasie $\mathcal{M}$ tych rozmaitości M_α dla których zachodzą tak zwane nierówności trójkąta:

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| + |\alpha_3|, \quad |\alpha_2| < |\alpha_1| + |\alpha_3|, \quad |\alpha_3| < |\alpha_1| + |\alpha_2|.$$

Wiadomo było, że zbiory M_α dla których zachodzi nierówność trójkąta są stabilne względem działania automorfizmów na trzydysku, to znaczy, dla każdego zbioru $M_\alpha \in \mathcal{M}$ i automorfizmu m trzydysku $\mathbb{D}^3$, zachodzi $m(M_\alpha) \in \mathcal{M}$. Pan Maciaszek rozszerza ten fakt w twierdzeniu 17:

Twierdzenie 17. *Jeśli $M_\alpha, M_\beta \in \mathcal{M}$, to istnieje automorfizm m trzydysku $\mathbb{D}^3$, taki że zachodzi $m(M_\alpha) = M_\beta$.*

Dowód tego twierdzenia jest elementarny, lecz dość techniczny. Twierdzenie 17 sprowadza badanie, czy zbiory rodziny $\mathcal{M}$ mają własność rozszerzania do jednego takiego zbioru. Kolejnym wynikiem w tym rozdziale jest

Twierdzenie 21. *Rodzina $\mathcal{M}$ jest tożsama z rodziną zbiorów jedyności dla ekstremalnych niezdegenerowanych, ściśle trójwymiarowych 3-punktowych problemów Picka w $\mathbb{D}^3$.*

Dowód tego twierdzenia jest elementarny i bardzo techniczny, a część żmudnych obliczeń na końcu dowodu zostało przeprowadzone przy pomocy komputera. W stwierdzeniu 22, na końcu rozdziału drugiego, Autor opisuje brzegi Szyłowa rozmaitości $M_\alpha \in \mathcal{M}$.

Rozdział trzeci rozprawy poświęcony jest dowodowi następującego twierdzenia.

Twierdzenie 26. *Niech $n \geq 3$. Załóżmy, że zbiór $\mathcal{V} \subset \mathbb{D}^n$ jest jednowymiarowy, algebraiczny, oraz posiada własność wielomianowego rozszerzania. Wówczas $\mathcal{V}$ jest holomorficznym retraktem.*

Wynik ten jest uzupełnieniem pewnych wyników K. Guo, H. Huanga, K. Wanga, Ł. Kosińskiego i J.R. M^{c}Carthy'ego na przypadek, gdy zbiór $\mathcal{V}$ jest jednowymiarowy. Dowód tego twierdzenia jest dość skomplikowany i niełatwy. Opiera sie on na twierdzeniu Heatha i Suffridge'a o postaci holomorficznego retraktu w $\mathbb{D}^n$ oraz na serii lematów dotyczących postaci jednowymiarowego zbioru algebraicznego posiadającego własność wielomianowego rozszerzania. Kluczowym jest lemat 30 mówiący o tym, że jednowymiarowy podzbiór algebraiczny w $\mathbb{D}^n$ posiadający własność rozszerzania, lokalnie jest wykresem funkcji holomorficznej.

Niech

$$\mathcal{R}_{II} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) : A = A^T,\ I - AA^* > 0\},$$

gdzie $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ jest przestrzenią macierzy 2×2 o współczynnikach zespolonych, a I jest macierzą jednostkową w $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Jest to szczególny przypadek dla $n = 2$ jednego z czterech typów obszarów oznaczanych $\mathcal{R}_I(m,n)$, $\mathcal{R}_{II}(n)$, $\mathcal{R}_{III}(n)$, $\mathcal{R}_{IV}(n)$, gdzie $n \neq 16, 27$, takich że dowolny nierozkładalny, symetryczny i ograniczony obszar w $\mathbb{C}^k$ jest biholomorficznie równoważny jednemu z nich (w myśl twierdzenie Cartana). Głównym wynikiem rozdziału czwartego jest nastepujące twierdzenie.

Twierdzenie 36. *Załóżmy, że V jest algebraicznym podzbiorem $\mathcal{R}_{II}$ mającym własność wielomianowego rozszerzania. Wtedy V jest holomorficznym retraktem.*

Jest to ciekawy i nietrywialny wynik. Dowód tego twierdzenia sprowadza się do pokazania że zbiór V zawiera parę zbalansowaną (lub infinitezymalnie zbalansowaną). W myśl lematu 38, jeśli V jest zbiorem relatywnie wielomianowo wypukłym, mającym własność wielomianowego rozszerzania i zawiera parę zbalansowaną, to zawiera dysk analityczny. Ten fakt i lemat 40 Ł. Kosińskiego i J.R. M^{c}Carthy'ego o istnieniu pary zbalansowanej, pozwalają udowodnić lemat 39 o postaci przecięcia zbioru algebraicznego V ze zbiorem $\{z_{12} = 0\}$. Ważnym jest również lemat 41 o istnieniu geodezyjnej dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in V$, w szczególności albo $\dim V = 2$ albo zbiór V składa się z jednej geodezyjnej. To daje tezę twierdzenia 36 w przypadku $\dim V = 1$. W przypaku gdy $\dim V = 2$ i zbiór zawiera parę zbalansowaną (odpowiednio infinitezymalnie zbalansowaną), lokalnie w otoczeniu zera zbiór V można przedstawić jako wykres

$$\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ y & \alpha x + f(x,y)\end{pmatrix}\right\},$$

gdzie $f(x,y) = O(\|(x,y)\|^2)$ oraz $|\alpha| \leq 1$. Dalej Autor pokazuje, że zbiór V jest retraktem, gdy $|\alpha| = 1$, a przypadek $|\alpha| < 1$ jest niemożliwy. Na końcu pokazuje, że w dowolnie małym otoczeniu zera istnieją w zbiorze V pary zbalansowane.

W dodatku A Doktorant przytacza wyniki Ł. Kosińskiego i J.R. M^c^Carthy'ego dotyczące konsekwencji własności rozszerzania zbiorów w innych obszarach. Pozwala to lepiej umiejscowić wyniki Doktoranta w świetle badań prowadzonych przez innych autorów.

Omówione powyżej wyniki są ciekawe, nowe, wpisujące się w aktualnie prowadzone badania naukowe, a ich dowody wymagały w wielu miejscach niełatwych i bardzo subtelnych rozważań. Autor rozwiązał w nich istotne problemy dotyczące związków między własnościami rozszerzania zbiorów i retraktów holomorficznych. Wstęp dobrze umiejscawia i motywuje podjęte rozważania. Z wszystkimi problemami Autor poradził sobie bardzo dobrze. Dowody są dość techniczne, lecz zrozumiałe. Pomagają w tym liczne komentarze do głównych tez pracy i przykłady.

Praca w kilku częściach ma charakter dość techniczny, sprawdzenie jej wymagało długiego czasu. Zawiera ona pewne drobne błędy zecerskie i niedociągnięcia, na przykład:

• W stwierdzeniu 8 pojawia się V, które nie jest wcześniej określone;

• Na stronie 19 zapowiadane jest: W Twierdzeniu 26 rozszerzymy ...", a jak się wydaje, powinno być "W twierdzeniu 17 rozszerzymy ...";

• W wyróżnionym wzorze na stronie 31 powinno być $\sup_{\mathbb{D}^2} F =$ zamiast $\sup_{\mathbb{D}^2} =$;

• Na stronie 40 dowód twierdzenia 26 kończy się stwierdzeniem "To kończy dowód Twierdzenia 34.";

• W definicjach obszarów $\mathcal{R}_{II}(n)$ oraz $\mathcal{R}_{III}(n)$ można było wyjaśnić, co oznacza $A > 0$ dla macierzy kwadratowej A;

• W pracy występują drobne błędy zecerskie, których nie wypisuję, bo są łatwe do poprawienia;

• Brak streszczenia w języku angielskim nie ułatwiają lektury pracy, zwłaszcza że literatura dotycząca tematyki pracy jest na ogół napisana w języku angielskim;

• Szkoda, że Autor nie odnosi sie w rozdziale pierwszym do monografii S. Łojasiewicza oraz monografii M. Jarnickiego i P. Pfluga, podczas gdy dokładnie cytuje odpowiednie twierdzenia z książki E.M. Chirki.

Podsumowując, tematyka pracy doktorskiej Pana Krzysztofa Maciaszka sytuuje się w klasycznej Analizie Wielu Zmiennych Zespolonych, Geometrii Analitycznej Zespolonej, Teorii Metryk i Odległości Niezmienniczych, a dotyczy przede wszystkim związków między własnościami rozszerzania zbiorów i retraktów holomorficznych. Wstęp dość dobrze wyjaśnia jej genezę. Wszystkie dowody wymagały dużej biegłości rachunkowej i pomysłowości. Lektura pracy pozwala wnioskować, że Autor posiada gruntowną wiedzę i dobrą orientację w zakresie prowadzonych badań. Widać również jego dużą samodzielność w prowadzonych badaniach naukowych. Wyniki uzyskane w pracy oraz ich rozwiązania są oryginalne, wzbogacają one stan obecnej wiedzy w zakresie rozszerzania zbiorów, zostały opatrzone wyczerpującymi komentarzami i przykładami. Rzucają one nowe światło na zagadnienia dotyczące rozszerzeń zbiorów.

Stwierdzam, że recenzowana praca Pana Krzysztofa Maciaszka spełnia wymogi ustawowe stawiane rozprawom doktorskim. Wnoszę o jej przyjęcie i dopuszczenie Pana mgr Krzysztofa Maciaszka do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

S. Spodzieja