Prof. dr hab. Leszek Plaskota
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Recenzja rozprawy doktorskiej autorstwa mgr. Rafała Muchorskiego

pt. "Application of adaptive grids in basket option pricing"

KONKLUZJA

Przedłożona rozprawa spełnia wymagania formalne i zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczenie mgr. Rafała Muchorskiego *do dalszych etapów przewodu doktorskiego.*

UZASADNIENIE

1. Wstęp i najważniejsze wyniki

Rozprawa doktorska mgr. Rafała Muchorskiego mieści się w kategorii metod obliczeniowych matematyki finansowej i dotyczy numerycznej wyceny opcji koszykowych typu europejskiego. Są one postaci

$$\left(w_1 S_T^{(1)} + w_2 S_T^{(2)} + \cdots + w_n S_T^{(n)} - K\right)^+, \tag{1}$$

gdzie $S_t^{(i)}$ jest ceną i-tego aktywu w chwili t, $0 \leqslant t \leqslant T$, liczba w_i odpowiadającą jemu wagą, a K ceną wykonania. Ponieważ zakłada się, że ceny aktywów są procesami losowymi, wycena opcji sprowadza się do obliczenia n-wymiarowej całki oznaczonej względem gęstości g odpowiadającej przyjętemu modelowi stochastycznemu, czyli

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n - K)^+ g(x_1, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n. \tag{2}$$

Wiadomo, że numeryczna aproksymacja całki (2) jest w ogólności zadaniem bardzo trudnym obliczeniowo, zwłaszcza dla dużych wymiarów n, czego wyrazem jest występujące często zjawisko *przekleństwa wymiaru* polegające na tym, że złożoność algorytmu aproksymującego całkę z zadaną dokładnością rośnie wykładniczo szybko wraz ze wzrostem n. To zjawisko dotyka również niektórych instrumentów finansowych. Doktorant unika go zakładając realistycznie, że koszyk składa się jedynie z kilku aktywów. (W testach numerycznych $n = 6$.) Dzięki temu możliwe jest, oprócz innych metod, zastosowanie kwadratur opartych na siatkach jednostajnych.

Inny znany problem przy obliczaniu (2) wynika z faktu, że funkcja podcałkowa jest tylko ciągła, a pierwsza pochodna ma pewne osobliwości, przez co wyniki teoretyczne

dPh

dotyczące numerycznego całkowania funkcji gładkich, np. typu C^s, nie mają formalnego zastosowania. Ten problem doktorant rozwiązuje w następujący sposób. Zakładając model Blacka-Scholes'a, całka (2) zostaje przez odpowiednią zamianę zmiennych sprowadzona do postaci

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^r}\int_{\mathbb{R}^r} G(\vec{z})\,\mathrm{e}^{-\|\vec{z}\|_2^2/2}\,\mathrm{d}\vec{z}, \qquad \vec{z}=(z_1,\ldots,z_r), \tag{3}$$

gdzie

$$G(\vec{z})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k \exp\left(\mu_k+\sigma_k x_k(z_0,\vec{z})\right)-K\right)^{+}\mathrm{e}^{-z_0^2/2}\,\mathrm{d}z_0, \tag{4}$$

$x_k(z_0,\vec{z}) = u_{k,0}z_0+\sum_{i=1}^{r} u_{k,i}z_i$, $1 \leqslant k \leqslant n$. (Tu funkcja podcałkowa zależy od przyjętych parametrów modelu i zastosowanej zamiany zmiennych.) Okazuje się, że przy pewnych założeniach funkcja G jest już klasy C^3 co sprawia, że całkę (3) można efektywnie aproksymować z odpowiednio małym błędem przy pomocy kwadratur typu parabol na odpowiednio dobranej siatce jednostajnej.

Główne wyniki doktoranta zaprezentowane w rozprawie polegają na opracowaniu oryginalnego, deterministycznego algorytmu numerycznego, zwanego przez autora *schematem adaptacyjnym*, dla aproksymacji całek typu (3) oraz jego dogłębnej analizie teoretycznej, w tym analizie błędu, z silnym uwzględnieniem specyfiki problemu, czyli ogólnych własności funkcji przynależnych postawionemu problemowi finansowemu. Najważniejszy wynik, twierdzenie 1 na str. 40, pokazuje ścisłe ograniczenie górne na błąd opracowanego schematu oraz jego zbieżność przy odpowiednio dobranej siatce adaptacyjnej. Autor dokonuje również skomplikowanej optymalizacji parametrów siatki i dobiera zamianę zmiennych tak, aby dla danej funkcji podcałkowej oszacowanie błędu otrzymanego schematu adaptacyjnego było możliwie najmniejsze.

Zaprezentowany schemat jest zastosowany do konkretnego modelu stochastycznego dla opcji koszykowych. Silnie rozbudowana część dotycząca eksperymetów numerycznych, gdzie schemat adaptacyjny porównany jest z dwoma wariantami metod typu Monte Carlo i quasi-Monte Carlo, pokazuje jego praktyczną stosowalność.

2. Streszczenie zawartości rozprawy

Rozprawa napisana jest w języku angielskim. Liczy 131 stron, na które składają się dziewięć rozdziałów i dwa dodatki oraz bibiografia. Rozdział 1 to rozbudowany wstęp, w którym autor definiuje opcje koszykowe, wylicza proponowane wcześniej odpowiadające im modele stochastyczne oraz metody numeryczne dla całek wielowymiarowych. Rozdział kończy podsumowanie najważniejszych wyników rozprawy, wspomnianych wcześniej.

W rozdziale 2 opisano przyjęty w pracy model rynku finansowego oraz dynamiki cen opcji koszykowych. Jest to nieco zmodyfikowany, znany wcześniej model LMVMD, gdzie losowo wybrany parametr dyfuzji jest ten sam dla wszystkich N składowych procesów. Rozważania teoretyczne prowadzą do istotnych dla dalszych rozważań formuł na cenę koszyka. Tu też zdefiniowano ważną klasę funkcji Ap_n zawierającą m.in. funkcje podcałkowe występujące w w/w formułach.

Rozdziały 3-5 poświęcone są bezpośrednio konstrukcji i analizie błędu zaproponowanego przez doktoranta schematu adaptacyjnego, nazwanego $AS(f, U, \Pi, d)$, dla całkowania funkcji z klasy Ap_n, a więc także dla wyceny opcji koszykowych. Schemat jest wyznaczony przez funkcję podcałkową $f \in Ap_n$, macierz $U \in \mathbb{R}^{n\times(r+1)}$ definiującą zamianę zmiennych, siatkę jednostajną Π będącą iloczynem kartezjańskim siatek jednowymiarowych, oraz dodatkowy parametry $d \in (0,1)^{r+1}$. Rozdział 4 zawiera ścisłe definicje schematu i błędu adaptacyjnego. Poprzedzają one bezpośrednio najważniejszy wynik, twierdzenie 1, na temat zbieżności i błędu schematu. W dowodzie wykorzystano m.in. fakty wykazane w poprzedzającym rozdziale 3 mającym pomocniczy charakter.

Formuła na błąd adaptacyjny $E(f, U, \Pi, d)$ z definicji 8 jest podstawą do jego optymalizacji w rozdziale 5, ale przy zawężeniu klasy do realistycznych funkcji będących ważoną sumą funkcji wykładniczych, podobnie do (3)-(4). Ze względu na mocne skomplikowanie formuły na błąd, optymalizacja jest wykonana dla ustalonej wartości parametru d, a i wtedy możliwa jest jedynie niepełna optymalizacja ze względu na macierz U i siatkę Π, a jej wynik podany częściowo w niejawnej, chociaż numerycznie obliczalnej, postaci.

Rozdziały 6 i 7 pokazują, jak ogólniejsza teoria numerycznego całkowania z poprzednich rozdziałów stosuje się do konkretnego modelu wyceny opcji koszykowych z rozdziału 2, osobno dla $N = 1$ i $N \geqslant 2$. Tu wyjaśnia się, w szczególności, jak poradzić sobie z obliczaniem wartości funkcji podcałkowej z (4) (dzięki tzw. trikowi Jamshidiana). Natomiast rozdział 8 poświęcony jest sposobom dostosowania parametrów przyjętego modelu, aby odzwierciedlał rzeczywiste zachowania rynku.

Ostatni rozdział 9 zawiera wyniki bogatych testów numerycznych przeprowadzonych na koszyku 6 aktywów, przy zmieniających się parametrach modelu. Wyniki dla skonstruowanego schematu są porównane z jednym z wariantów (niedeterministycznej) metody Monte Carlo z redukcją wariancji oraz z (deterministyczną) metodą quasi-Monte Carlo wykorzystującą punkty Sobola. W każdym teście wyliczany jest m.in. błąd schematu adaptacyjnego.

3. Uwagi

Rozprawa doktorska mgr. Rafała Mucharskiego zawiera bogaty materiał zarówno teoretyczny jak i eksperymentalny. Autor z równą swobodą operuje narzędziami matematyki finansowej jak i matematyki obliczeniowej. Godna podziwu jest sprawność rachunkowa oraz sposób w jaki autor porusza się w gąszczu formuł, które są nierzadko otrzymywane w wyniki żmudnych, czasem nawet trudnych do śledzenia obliczeń. (Odnosi się wrażenie, że doktorant wręcz lubuje się w tego typu obliczeniach.) Z drugiej strony, bez wnikliwej analizy tekstu nie zawsze jasne jest dlaczego niektóre pokazywane fakty są ważne i gdzie są wykorzystywane. To powoduje, że czytelnik może mieć w pewnych miejscach trudności z podążaniem za tokiem myślenia autora. Na przykład, wyjaśnienie w jaki sposób oblicza się numerycznie funkcję podcałkową (4), o co spyta każdy numeryk czytając wstęp do rozprawy, jest "ukryte" w rozdziale 6.

Z punktu widzenia czytelnika narzuca się pytanie, czy to wszystko musi być aż tak skomplikowane. Tak czy inaczej, owe skomplikowane rozważania prowadzą do konkluzywnych wyników. Końcowym efektem jest bowiem implementowalny numeryczny schemat adaptacyjny wyceny opcji koszykowych wraz ze ścisłym, deterministycznym ograniczeniem jego błędu. Możliwość policzenia "małego" przedziału, w którym znajduje się dokładne rozwiązanie stanowi moim zdaniem najistotniejszą wartość dodaną. Takie oszacowania zwykle nie są osiągalne dla tradycyjnych metod numerycznego całkowania w wielu wymiarach.

Skonstruowany schemat ma też pewne wady. Jak sam autor przyznaje, jego stosowalność ogranicza się do kilku wymiarów, ponieważ używa siatki jednostajnej. Jako numeryk, chętnie zobaczyłbym nie tylko dowód zbieżności schematu, ale też jaka jest szybkość zbieżności. Wobec tego, że użyta kwadratura jest w jednym wymiarze rzędu 3, wydaje się, że zbieżność dla koszyka 6 aktywów jest nie lepsza niż $(1/N)^{0.6}$, gdzie N oznacza tu liczbę punktów siatki, co potwierdzają przeprowadzone testy porównawcze z MC z QMC. Dla większej liczby, powiedzmy 10 aktywów, QMC mogłaby już dawać istotnie lepsze wyniki, bo błąd schematu adaptacyjnego byłby prawdopodobnie jedynie rzędu $(1/N)^{1/3}$. Jednak tego nie wiemy na pewno, bo takich testów nie przeprowadzono.

Warto również zwrócić uwagę na złożoność zaproponowanego schematu. Mierzona liczbą punktów siatki, jest ona (dla 6 aktywów) porównywalna z innymi metodami. Ale nie należy zapominać o koszcie wstępnym związanym ze skomplikowaną optymalizacją parametrów. Autor nie porusza tej kwestii, ani nie podaje rzeczywistego czasu wykonania programu implementującego schemat.

Te uwagi krytyczne mają jednak mniejsze znaczenie, jeśli przyjmiemy, że celem nadrzędnym jest posiadanie implementowalnej metody wyceny opcji koszykowej z co najwyżej kilkoma aktywami wraz z sensowym oszacowaniem błędu. A te cele schemat adaptacyjny niewątpliwie spełnia. Biorąc to pod uwagę, jak również wykazaną i wcześniej wspomnianą wysoką matematyczną erudycję doktoranta, wnioskuję jak na początku tej recenzji.

Inne uwagi:

- We wstępie trochę zabrakło mi wspomnienia o metodach numerycznych zwanych *lattice rules*
- Założenie o monotoniczności wydaje się niewystarczające do tego by przedział $Ap(f)$ w (2.49) był dobrze zdefiniowany.
- W rozprawie pisanej w języku angielskim zwyczajowo umieszcza się dodatkowo streszczenie po polsku, czego w niniejszej rozprawie brakuje.
- W bibliografii pozycje umieszczone są w porządku chronologicznym, a nie w znacznie częściej używanym porządku alfabetycznym, co trochę utrudnia wyszukiwanie prac po nazwiskach autorów.
- Autor nie ustrzegł się usterek redakcyjnych. Np., zwraca uwagę dość nonszalanckie (nie)stosowanie znaków interpunkcyjnych, zwłaszcza we wzorach matematycznych.
- Wybrane detale:
  1. str. 11, formuła (1.6): $O(\frac{1}{N-1})$ jest tożsame z $O(\frac{1}{N})$.

2. str. 12, formuła (1.10): brakuje $\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{r+1}}$ przed całką.
3. str. 12, -15: Należałoby powiedzieć, że $U = (u_{i,k})$; poza tym U jest formatu $n \times (r+1)$, a nie $n \times n$.
4. str. 12, formuła (1.12): $G(\vec{z})$, a nie $G(z_0, \vec{z})$.
5. str. 12, -9: tu warto dodać o jaką gładkość chodzi.
6. str. 12, -7: formalnie kwadratury mogą być stosowane także gdy funkcja podcałkowa nie jest gładka.
7. str. 12, -4: To zdanie jest grubo na wyrost. W rozprawie mowa tylko o zbieżności, nie ma nic o szybkości zbieżności.
8. str. 13, +2: W (1.12) całkujemy po $\vec{z}$, a nie po z_0.
9. str. 17, +14: Należy usunąć "an"
10. str 23, Definition 5: Notacja $Ap(f)$ i Ap_n jest trochę niefortunna, bo $Ap(f)$ oznacza liczbę, a Ap_n zbiór funkcji, czyli zupełnie inne obiekty.
11. str. 32, formuła (4.5): Powinno być

$$\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-z^2/2} H_{k+1}(z)\,\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{-x^2/2} H_k(x), \qquad k \geqslant 0,$$

12. str. 33, +11: "Now"
13. str. 35, formuła (4.24): Należy usunąć argument f w definicjach τ_1 i τ_3.
14. str. 35, formuła (4.26): Wewnętrzne max można uprościć do

$$\exp\left(\tfrac{d}{2}(z_{2i+2}^2 - z_{2i}^2)\right)$$

15. str. 35, -7: "it holds"
16. str. 35, -5: "the case"
17. str. 37, +8: "In what follows ... rule $Q(\cdot)$ to many dimensions."
18. str. 37, -4: Użyta tu nazwa "subgrid" jest trochę niefortunna, gdyż zwykle oznacza ona podzbiór większej siatki.
19. str. 39, -13: W jakim sensie i dlaczego wagi są wypukłe?
20. str. 39, -3: "The quartet"
21. str. 40, -14: Lepiej napisać $f_U(y) = f(Uy)$, bo z jest liczbą w (4.62).
22. str. 40, -13: "it holds"
23. str. 40, -5: "defined as"
24. str. 41, -8: "than the corresponding"
25. str. 42, +3: Należy usunąć pierwsze "we have".
26. str. 43, -11: "of the assertion"
27. str. 46, +10: Powinno być $AS(f, U, \Pi, d)$

28. str. 52, +7: Powinno być (5.36) zamiast (5.49)
29. str. 63, -10: Należy usunąć drugie “once more”
30. str. 64, +12: Przecinek zamiast kropki na końcu linii.
31. str. 65, +8: Notacja $\pi(K, T; AS)$ w połączeniu z $\pi(K, T)$ jest trochę niefortunna.
32. str. 65, +8: Na końcu linii powinno być $\pi(K, T)$ zamiast $\pi(A, K)$.
33. str. 66, -5: Lepiej usunąć “in respect to the variable z”.
34. str. 67, formuła (6.22): Indeksy i powinny być zastąpione przez m.
35. str. 67, -7: “was used to decompose”
36. str. 71, +4: Należy usunąć pierwsze “mixture”.
37. str. 82, -7: “plain vanilla”
38. str. 91, -9: “control variates”
39. str. 98, +5: Należy usunąć “a”.