Recenzja rozprawy habilitacyjnej dra Macieja Ciesielskiego "Własności geometryczne przestrzeni funkcyjnych Banacha"

Rozprawa dra Macieja Cieślińskiego poświęcona jest najogólniej rzecz ujmując własnościom geometrycznym w funkcyjnych przestrzeniach Banacha - wypukłościowym i monotonicznym oraz ich wykorzystaniu w teorii aproksymacji. Oprócz rezultatów natury ogólnej, jako ich zastosowania zbadano pod kątem tychże własności szereg konkretnych przestrzeni funkcyjnycj - Orlicza, Lorentza i Marcinkiewicza.

Rozprawa habilitacyjna składa się z sześciu artykułów. Zagadnienia opisywane w artykułach rozproszone są w nich rozmaicie. Będzie zatem wygodniej omawiać wyniki trzymając się raczej klucza tematycznego, niż chronologicznego.

Badanie wypukłości w przestrzeniach funkcyjnych jest mocno rozwinięte, w szczególności należy tu wymienić wyniki takich autorów jak A. Kamińska, H. Hudzik, F. Sukoczev i wielu innych - oczywiście lista autorów zajmujących się wypukłością w ogólnych przestrzeniach Banacha jest olbrzymia i nie ma sensu jej tu wymieniać. Badania przestrzeni funkcyjnych mają swoją specyfikę i z uwagi na porządkowy charakter i konkretną reprezentacje które stosowane metody istotnie wykorzystują.

Wspomnieć tu należy pracę H. Hudzika, A. Kamińskiej i M. Mastyły w której badanie lokalnej jednostajnej wypukłości przestrzeni sprowadzono do badania stożka elementów nieujemnych. Jeden z wyników pracy [H1] poświęcony jest lokalnej wersji tego rezultatu, sprowadzającej lokalną jednostajną wypukłość w punkcie do jej zbadania w absolutnej wartości tego punktu.

Kolejny rezultat z pracy [H1] został zainspirowany wynikiem Medzitova i Sukocheva w którym badanie lokalnej jednostajnej wypukłości sprowadzono do stożka elementów nieujemnych i niemalejących - teraz już przy ograniczeniu do przestrzeni symetrycznych. Z grubsza rzecz biorąc, analogicznie jak w przypadku poprzedniego wyniku, podobna możliwość zostala wykazana dla badania lokalnej jednostajnej wypukłości w pojedyńczym punkcje. Sprowadza się je do badania tej własnoścu w nierosnącym przestawieniu modułu tego punktu. Mimo, że sprowadzenie do elementu nierosnącego w przypadku jednopunktowej własności wymaga porządkowej ciągłości przestrzeni symetrycznej, to jednak globalna jednostajna wypukłość sprowadza się do stożka nieujemnego i niemalejącego już bez tego założenia ulepszając w ten sposób znacznie wynik Medzitova i Sukocheva.

W tym kręgu zagadnień badano również inne rodzaje jednostajnej wypukłości na przestrzeniach symetrycznych. Pokazano między innymi, że w przestrzeniach symetrycznych bycie punktem lokalnej całkowitej k-wypukłości (własność wprowadzona przez K. Fana i I. Glicksberga)jest równoważne tej samej własności zarówno dla modułu tego punktu jak i dla jego niemalejącego przestawienia.

Badanie k-wypukłości przełożyło się na koniec również na elegancki rezultat dotyczący refleksywności przestrzeni symetrycznych. W pracy [H2] pokazano, że warunkiem dostatecznym dla refleksywności przestrzeni symetrycznej jest zwarta całkowita k-wypukłość jej stożka elementów nieujemnych nierosnących.

O ile własności wypukłościowe są banachowskimi własnościami geometrycznymi, o tyle kolejna klasa własności badanych w habilitacji dotyczy już stricte przestrzeni funkcyjnych (a nawet symetrycznych). Mowa tu o K-monotoniczności, czyli o majoryzowaniu normy przez elementy dominujące w porządku zadanym przez relację Hardy'ego-Littlewooda-Polya. W duchu podobnym do rozważań dotyczących własności wypukłościowych dowodzi się w [H2] między innymi, że monotoniczne przestawienie jest punktem monotoniczności i Kadeca-Klee według miary jest równoważne z warunkiem bycia punktem lokalnej jednostajnej K-monotoniczności przy założeniu porządkowej ciągłości nierosnącego przestawienia. Składnikiem dowodu było pokazanie, że gdy punkt ma własność górnej K-monotoniczności oraz ciąg ograniczony przezeń z dołu przez relację Hardy'ego - Littlewooda - Polya ma zbieżne normy, to odpowiednie przestawienia zbiegają globalnie według miary.

W pracy [H4] zostały podane warunki (w terminach funkcji fundamentalnej) przy których własności bycia punktem porządkowej ciągłości i K-porządkowej ciągłości są równoważne. Pokazano również, konstruując stosowne przykłady, że można wybudować przestrzenie nie spełniające tych warunków dla których równoważność nie zachodzi. Powyższe warunki prowadzą też do globalnych równoważności.

Ciekawą własnością badaną w przestrzeniach symetrycznych i wprowadzoną przez autora w związku z badaniami aproksymacyjnymi jest jednostajna K-monotoniczność, gdzie zwykły porządek został zastąpiony przez relację Hardy'ego-Littlewooda-Polya w definicji jednostajnej monotoniczności. I znów autor pokazuje równoważność malejącej jednostajnej K-monotoniczności oraz K-porządkowej ciągłości i górnej lokalnie jednostajnej K-monotoniczności.

W całość pracy habilitacyjnej dobrze wpisują się wyniki dotyczące teorii aproksymacji zawarte głównie w pracach [H5] i [H6]. Istnienie, jednoznaczność i stabilność najlepszej aproksymacji w przestrzeni symetrycznej (i ogólnie funkcyjnej) są ciasno związana z jej własnościami wypukłościowymi i monotonicznościowymi. W pracy [H5] wskazano zależności pomiędzy ścisłą K-monotonicznością i jednoznacznością problemu zdominowanej najlepszej aproksymacji w sensie relacji Hardy'ego - Littlewooda - Polya - między innymi pokazano warunki przy których z faktu jednznaczności elementu najlepszego przybliżenia zdominowanego elementu dodatniego wynika, że ów element jest punktem jednostajnej K-monotoniczności. Podobnie uzyskano warunki dla elementu s i rozwiązywalności problemu aproksymacji. W rezultacie scharakteryzowano K-porządkową ciągłość przestrzeni symetrycznych w terminach rozwiązywalności problemu aproksymacji.

W pracy [H6] powiązano ścisłą K-monotoniczność przestrzeni symetrycznej z jednoznacznością najlepszej aproksymacji dla zbiorow K-ukierunkowanych oraz jednostajną K-monotoniczność ze zbieżnością nierosnących przestawień dla ciągów minimalizujących ze zbiorów K-ukierunkowanych. W pracy tej podano również pewne warunki (znacznie słabsze niż znane dotychczas), na ciągłość operatora najlepszego przybliżenia w zagadnieniu dla zbiorów K-ukierunkowanych w przestrzeniach symetrycznych.

Omówimy też pokrótce zastosowania powyższych rezultatów do konkretnych przestrzeni funkcyjnych podane w rozprawie habilitacyjnej. Pokazano między innymi, że przy pewnych umiarkowanie restrykcyjnych założeniach na nieznikanie wagi przestrzeń Lorentza (z refleksywnym wykładnikiem) jest lokalnie jednostajnie wypukła, że przestrzenie Lorentza posiadają własność Kadeca - Klee względem globalnej zbieżności według miary. Ponadto opisano kryteria K-porządkowej ciągłości w przestrzeniach Orlicza oraz pokazano K-porządkową ciągłość w przestrzeniach Lorentza (obu typów) oraz w przestrzeni Orlicza - Lorentza.

Oprócz prac wchodzących w skład rozprawy habilitacyjnej w dorobku dra Macieja Ciesielskiego znajduje się sporo innych prac poświęconych geometrii przestrzeni funkcyjnych. Zarówno zagadnieniom wypukłościowym, jak i monotonicznościowym oraz aproksymacyjnym. Zarówno zagadnienion ogólnym jak i własnościom konkretnych przestrzeni funkcyjnych

Moja ocena wyżej opisanej części dorobku dra Macieja Ciesielskiego jest pozytywna. Wykazał się dogłębną znajomością tematyki krat symetrycznych. W zestawie prac wchodzących w skład habilitacji została przeprowadzona bardzo szczegółowa analiza lokalnych geometrycznych własności wypukłościowych i porządkowych przestrzeni funkcyjnych. W pracach z rozprawy znajduję się szereg nowych, często delikatnych rezultatów, niejednokrotnie poprawiających lub poważnie uzupełniających dotychczasową wiedzę. Jest to co prawda tematyka dziś już raczej dość niszowa i nie znajdziemy tu rezultatów "przełomowych" ani nawet specjalnie zaskakujących, tym niemniej jest na świecie spore grono osób które się nią zajmuje i rezultaty dra Ciesielskiego mogą liczyć na pewien oddźwięk, a nawet być może jakieś zastosowania. Na podkreślenie zasługuje to, że prace dra Macieja Ciesielskiego mają kilku współautorów (a wliczając te spoza rozprawy - naliczyłem jedenaścioro), co w mojej opinii jest zaletą i pozytywnie świadczy o zdolnośći do współpracy.

Uwzględniając powyższe argumenty skłaniam się ku opinii, że osiągnięcie naukowe przedstawione w przewodzie habilitacyjnym oraz pozostały dorobek dra Macieja Ciesielskiego spełniają warunki "Ustawy o tytułach i stopniach naukowych". Popieram zatem wniosek o nadanie stopnia doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Michał Wojciechowski