STRESZCZENIE ROZPRAWY
MEDIAL AXIS AND SINGULARITIES

ADAM BIAŁOŻYT

Przedmiotem rozprawy doktorskiej są badania nad szkieletem zbioru domkniętego na gruncie teorii osobliwości. Szkielet zbioru domkniętego X, oznaczany przez M_X, definiowany jest jako ogół punktów przestrzeni, dla których istnieje więcej niż jeden najbliższy element X. Symbolicznie $M_X := \{a \in \mathbb{R}^n | \ \#m(a) > 1\}$, gdzie $m(a)$ oznacza zbiór punktów najbliższych w X do a.

Początki pojęcia szkieletu sięgają połowy XX wieku. Herbert Federer we wpływowej pracy [Fed59] badał zbiory wykazujące własności wspólne dla zbiorów wypukłych i różniczkowalnych rozmaitości. Bez definiowania szkieletu per se wyróżnił de facto klasę zbiorów rozłącznych z domknięciem swojego szkieletu. Dla tych, nazwanych prawie wypukłymi, zbiorów skonstruował następnie miary geometryczne oraz udowodnił szereg twierdzeń m.in. formułę Steinera opisującą miarę sumy Minkowskiego $X + \mathbb{B}(0,r)$.

Prawdziwym ojcem szkieletów należy jednak nazwać Henry'ego Bluma. W [Blu67] zwrócił on uwagę, iż zbiór którego skrupulatnie unika Federer jest pełnym deskryptorem kształtu. Otworzyło to drogę szkieletom do zastosowań w dziedzinie analizy obrazu, a w konsekwencji też w robotyce, tomografii komputerowej i innych. Zaskakująco jednak, pomimo licznych zastosowań, matematyczna teoria szkieletów wciąż czeka na kompleksowy opis. Nomenklatura teorii jest wyjątkowo niespójna - już sam szkielet występuje w języku angielskim pod wieloma nazwami - Medial Axis, Skeleton, Cut Locus, oraz mylnie Central Set. Motywacja zastosowaniami natomiast najczęściej ogranicza wyniki do rezultatów dotyczących szkieletów podzbiorów płaszczyzny lub zbiorów kowymiaru jeden.

Związek między szkieletami a teorią osobliwości, choć zdawałby się naturalnym patrząc na Federerowski rodowód, stał się głównym tematem badań dopiero w pracy Lva Birbraira i Macieja Denkowskiego [BD17b; BD17a]. W owej pracy autorzy przedstawili przekonującą wizję znajdywania osobliwości zbioru poprzez badanie jego szkieletu. W sytuacji zawężonej do płaszczyzny euklidesowej zdołali w pełni scharakteryzować metrycznie przecięcie $X \cap \overline{M_X}$. Ustanowili także szereg narzędzi służących badaniu odległości szkieletu od punktów zbioru.

Dysertacja koncentruje się na adaptacji teorii szkieletów do podzbiorów przestrzeni euklidesowych dowolnego wymiaru definiowalnych w strukturach o-minimalnych. Jednym z pierwszych ważnych wyników jest opis stożka stycznego szkieletu za pomocą multifunkcji punktów najbliższych. *Dla* $a \in M_X$ *mamy* $M_{m(a)} \subset C_a M_X$. Rezultat ten nawiązuje do analogicznych twierdzeń teorii zbiorów konfliktowych uzyskanych przez Lva Birbraira i Dirka Siersmy [BS09]. Pomimo łudzących podobieństw między szkieletem a zbiorem konfliktowym dowód Birbraira i Siersmy nie jest możliwy do przeniesienia na opisywany w dysertacji grunt. Zmuszeni jesteśmy wobec tego do wypracowania nowych metod operowania na szkieletach.

Konsekwencje wyników dotyczących stożków stycznych dotykają teorii wymiaru. W drugim rozdziale rezultatów opisujemy bowiem wymiar szkieletu za pomocą wymiaru zbioru najbliższych punktów. Jest to pewnego rodzaju odpowiednik znanego z zespolonej geometrii analitycznej twierdzenia Remmerta o rzędzie wzbogacony o charakterystyczną dla szkieletów subtelność. Okazuje się, że wymiar szkieletu w punkcie a zależy nie tylko od punktów najbliższych do a, ale również od wymiarów $m(b)$ dla b w pewnym otoczeniu a. *Dla dowolnego zbioru domkniętego* $X \subset \mathbb{R}^n$ *oraz punktu* $a \in M_X$ *zachodzi równość* $\dim_a M_X + \min\{\dim m(b) | b \in U, U -$ *otoczenie* $a\} = n - 1$. Naturalnie z wersji lokalnej otrzymujemy globalny opis wymiaru szkieletu zbioru domkniętego. *Dla dowolnego domkniętego* $X \subset \mathbb{R}^n$ *mamy* $\dim M_X + \min\{\dim m(a) | a \in M_X\} = n-1$. Tym samym rozwiązujemy w o-minimalnej geometrii hipotezy stawiane wcześniej przez Erdösa [Erd45; Erd46] oraz Denkowskiego [Den11].

Kolejnym obiektem badanym w dysertacji jest promień osiągalności $\tilde{r}(a)$ - odpowiednik promienia krzywizny dla zbiorów z osobliwościami. Promień definiowany w pracy bazuje na ideach Birbraira i Denkowskiego z [BD17b], odwraca jednak kolejność brania granic. Za jego pomocą charakteryzujemy punkty skraju szkieletu. *Dla dowolnego punktu* $a \in \mathbb{R}^n$ *mamy* $a \in \overline{M_X} \setminus M_X$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $\tilde{r}(a) \leq d(a, X)$ *oraz* $\#m(a) = 1$. Charakteryzacja ta jest daleko idącym wzmocnieniem wyników Tatsuyi Miury [Miu16]. Jest to wynik też o tyle wyróżniający się w pracy, że nie wymaga zakładania o-minimalności struktury w której definiowalny jest zbiór. Kolejnym dokonaniem wprowadzonego promienia jest znaczne uproszczenie oryginalnych definicji Birbraira i Denkowskiego, oraz wykazanie ich ciągłości na $\mathscr{C}^2$-gładkiej częśći zbioru. Ostatecznie korzystając z uzyskanych wyników pokazujemy, że kolejność brania granic w definicji Birbaira i Denkowskiego nie zmienia końcowej wartości promienia osiągalności.

Ostatnim tematem poruszanym w pracy jest zagadnienie części wspólnej zbioru oraz domknięcia jego szkieletu. Możemy ograniczyć się w tym zakresie do badania jedynie $\mathscr{C}^2$-osobliwej części zbioru. Zgodnie bowiem z wynikami Nasha [Nas52] szkielet jest odseparowany od $\mathscr{C}^2$-gładkiej części zbioru. Zagadnienie rozważamy zatem w naturalnym podziale na część $\mathscr{C}^1$-gładką i $\mathscr{C}^1$-osobliwą. W pierwszym przypadku uzyskujemy uogólnioną wersję twierdzenia z [BD17b]. Niestety wielowymiarowy przypadek okazuje się subtelniejszy niż podzbiory płaszczyzny i *nadkwadratowość - narzędzie stosowane przez Birbraira i Denkowskiego - przestaje być warunkiem koniecznym do wychwytywania zbliżającego się szkieletu (pozostaje jednak warunkiem wystarczającym).* W kwestii części $\mathscr{C}^1$-osobliwej uzyskujemy dwie serie wyników. Z jednej strony wzmacniamy pochodzące od Birbraira i Denkowskiego kryterium niewypukłego stożka stycznego. *Dla dowolnego punktu* $a \in X$, *dla którego* $C_a X \not\subset \liminf_{b \to a} C_b X$, *mamy* $a \in \overline{M_X}$. Z drugiej generalizujemy wyniki Jana Rataja i Ludka Zajíčka [RZ16]. *Dla dowolnego punktu* $\mathscr{C}^1$*-osobliwego punktu* $a \in X$, *dla którego istnieje* $\dim_a X$*-wymiarowa podrozmaitość topologiczna* $\Gamma \subset X$ *zawierająca punkt* a, *mamy* $a \in \overline{M_X}$.

BIBLIOGRAFIA

[BD17a] L. Birbrair i M. Denkowski. *Erratum to: Medial axis and singularities.* 2017. arXiv: 1705.02788 [math.MG].

[BD17b] L. Birbrair i M. Denkowski. „Medial axis and Singularieties". W: *J. Geom. Anal.* 27.3 (2017), s. 2339–2380.

[Blu67] H. Blum. „A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape". W: *Models for the Perception of Speech and Visual Form.* Cambridge: MIT Press, 1967, s. 362–380.

[BS09] L. Birbrair i D. Siersma. „Metric Properties of Conflict Set". W: *Houston Math. J.* 35.1 (2009), s. 73–80.

[Den11] M. Denkowski. „On the points realizing the distance to the definable set". W: *J. Math. Anal. App.* 378 (2011), s. 592–602.

[Erd45] P. Erdös. „Some remarks on the measurability of certain sets". W: *Bull. Amer. Math. Soc.* 51.10 (1945), s. 728–731.

[Erd46] P. Erdös. „On the Hausdorff dimension of some sets in Euclidean space". W: *Bull. Amer. Math. Soc.* 52.2 (1946), s. 107–109.

[Fed59] H. Federer. „Curvature measures". W: *Trans. Amer. Math. Soc.* 93 (1959), s. 418–481.

[Miu16] T. Miura. „A characterization of cut locus for C^1 hypersurfaces". W: *NoDEA-Nonlinear Diff.* 23.6 (2016).

[Nas52] J. Nash. „Real Algebraic Manifolds". W: *Ann. Math.* 56.3 (1952), s. 405–421.

[RZ16] J. Rataj i L. Zajíček. „On the structure of sets with positive reach". W: *Math. Nachr.* 290 (2016), s. 1806–1829.