Instytut Matematyki
Uniwersytet Gdański
Prof. dr hab. Zbigniew Szafraniec

Gdańsk, 13 lutego 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej Adama Białożyta

Medial Axis and Singularities.

Promotor - dr hab. Maciej Denkowski, prof. UJ

Rozprawa, w całości napisana po angielsku, jest poświęcona badaniu geometrycznych własności szkieletu (ang. medial axis) zbioru domkniętego X, oraz innych stowarzyszonych z tym pojęciem zbiorów i funkcji. Autor szczególną uwagę poświęcił punktom osobliwym tych obiektów w przypadku gdy zbiór X jest definiowalny w pewnej o-mimimalnej strukturze.

Szkielet M_X zbioru domkniętego $X \subset \mathbf{R}^n$ jest zbiorem tych punktów $a \in \mathbf{R}^n$ dla których istnieją co najmniej dwa punkty w zbiorze X których odległość od punktu a jest równa $d(a, X)$. Zbiór ten jest w naturalny sposób stowarzyszony ze zbiorem X, a opis jego własności pozwala charakteryzować ważne geometryczne własności zbioru X. Dlatego badania szkieletów różnych klas zbiorów były prowadzone od dawna przez liczne grono matematyków. Niektóre ważne wyniki uzyskane dzięki tym badaniom zostały dokładnie przedstawione i omówione w rozprawie.

W pracy opisano szczegółowo przykład (zaprezentowany przez Fremlina w 1997 roku) zbioru X, którego szkielet jest gęsty w otwartym kole. Przykład ten wskazuje na potrzebę dodatkowych założeń o zbiorze X. Dlatego rozprawa jest poświęcona głównie przypadkowi, gdy zbiór X jest definiowalny. Szkielet M_X jest wtedy też definiowalny, co pozwala na badanie jego własności z użyciem zaawansowanych metod geometrii analitycznej.

Można też wtedy zdefiniować takie kolejne ważne pojęcia i funkcje wielowartościowe jak: funkcja $m : \mathbf{R}^n \to 2^X$, funkcję $r : X \to \mathbf{R}$ (ang. reaching radius), $\dot{r} : X \to \mathbf{R}$ (ang. temporarily reaching radius) i inne. Pojęcia te pozwalają sformułować najważniejsze twierdzenia przedstawione w rozprawie:

- Twierdzenie 4.6. Jeżeli zbiór $X \subset \mathbf{R}^n$ jest definiowalny oraz $0 \in \overline{M_X}$, to $M_{m(0)} \subset C_0 M_X$. Przestawiono też przykład, gdy to zawieranie jest istotne.
- Twierdzenie 4.8. Podano w nim warunki wystarczające do tego, żeby zbiory występujące w powyższym twierdzeniu twierdzeniu by równe.
- Twierdzenie 4.20. Niech $\mathcal{D}$ będzie cylindrycznym komórkowym definiowalnym rozkładem przestrzeni $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ zgodnym z wykresem funkcji $m|M_X$. Jeżeli $x_0 \in M_X$ należy do wnętrza M_X względem $\mathcal{D}$, to
$$\dim_{x_0} M_X + \dim m(x_0) = n - 1.$$
- Twierdzenie 4.37. Dla każdego punktu $a \in X$ zachodzi równość $\dot{r}(a) = r(a)$.

- Twierdzenie 4.57. Niech $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ będzie domkniętą k-wymiarową topologiczną rozmaitością. Jeżeli $G \subset \mathbf{R}^n$ jest takim k-wymiarowym definiowalnym zbiorem że $\Gamma \subset G$, to
$$\Gamma \cap \overline{M_\Gamma} \subset G \cap \overline{M_G}.$$

Dowody tych twierdzeń, i wypływających z nich wniosków, wymagały dobrego opanowania zaawansowanych technik stosowanych w tej dziedzinie. Łączyły one różnorodne geometryczne argumenty, z metodami teorii struktur o-minimalnych. Podobało mi się też, że autor przedstawił liczne przykłady i kontrprzykłady wraz z przejrzystymi ilustracjami. Układ pracy jest dobrze przemyślany. Autor włożył dużo wysiłku aby przedstawić czytelnie wiele technicznie trudnych detali dowodów.

Zauważyłem tylko kilka drobnych usterek redakcyjnych. Inne uwagi przedstawiam poniżej:

- str. 18. Stwierdzono tam, o ile dobrze rozumiem, że jeżeli X jest domkniętym niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej, to dla dowolnego punktu a zachodzi równość $\inf\{d(a,x) \mid x \in X\} = \min\{d(a,x) \mid x \in X\}$. Oczywiście tak jest gdy $X \subset \mathbf{R}^n$, ale nie w dowolnej przestrzeni metrycznej.

- Twierdzenie 3.24. Nie jest dla mnie jasne, czy liczba r tam zdefiniowana jest zawsze dodatnia, czy może należało to założyć.

- Twierdzenie 3.25. Przypuszczam że należy tam założyć, że zbiór X jest definiowalny, jak w poprzedzających twierdzeniach.

- Na str. 27 liczba $reach(X)$ jest zdefiniowana dla zbioru domkniętego X. Na kolejnej stronie pojawiła się liczba $reach(X \cap U)$, gdzie U jest zbiorem otwartym, więc zbiór $X \cap U$ może tu nie być domknięty.

- Twierdzenie 4.51. Zamiast $\mathbf{R}^k$ powinno być $\mathbf{R}^n$, tak jak w dowodzie tego twierdzenia..

Usterki te są łatwe do poprawienia, i nie mają wpływu na poprawność argumentów prezentowanych w rozprawie.

Według mojej wiedzy, Adam Białożyt jest współautorem (wraz z Maciejem Denkowskim i Piotrem Tworzewskim) jednego artykułu opublikowanego w 2020 roku w *Annales Polonici Mathematici.* Tematyka tego artykułu jest niezależna od tematyki rozprawy.

Praca świadczy o dobrej znajomości trudnych technik stosowanych w dziedzinie rozprawy. Uzyskane wyniki są oryginalnym, wartościowym wkładem w badania poświęcone geometrycznym własnościom szkieletów zbiorów definiowalnych i ich punktom osobliwym. Uważam, ze rozprawa doktorska pana Adama Białożyta spełnia ustawowe i zwyczajowe wymagania. Wnioskuję o skierowanie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Szafraniec