

Zastosowanie siatek adaptacyjnych w wycenie opcji koszykowych

Rafał Muchorski

Podsumowanie pracy doktorskiej

Rozprawa doktorska dotyczy zastosowania nowej metody numerycznej do wyceny opcji koszykowych. W pierwszej kolejności prezentowany jest wielowymiarowy model typu "local volatility" dla cen forward aktywów. W tym modelu wektor losowy cen forward aktywów ma rozkład będący mieszaniną rozkładów, gdzie każdy rozkład mieszaniny ma lognormalne rozkłady brzegowe (z dopuszczalnym przesunięciem) i zależność cen opisana jest kopułą gaussowską.

Wyprowadzamy z modelu wzory na teoretyczną, wolną od arbitrażu cenę europejskiej opcji koszykowej, którą można wyrazić w postaci całki wielowymiarowej. Nie posiada ona jawnego wzoru analitycznego. W celu jej numerycznej aproksymacji prezentujemy nowatorską metodę kwadraturową opartą na koncepcji "siatek adaptacyjnych".

Całkowanie w n wymiarach, związane z formułą na wycenę opcji koszykowej, można przedstawić postaci całki w $n - 1$ wymiarach, z funkcją podcałkową wyrażającą się w postaci całki jednowymiarowej i będącą funkcją $n - 1$ zmiennych. Dla takiej funkcji konstruujemy jednowymiarową kwadraturę z błędami aproksymacji (błędami adaptacyjnymi), które zależą od pierwszej i trzeciej pochodnej cząstkowej. Następnie uogólniamy jednowymiarową kwadraturę do przypadku wielowymiarowego. Kwadratura $n - 1$ -wymiarowa oblicza funkcję podcałkową w punktach $n - 1$ -wymiarowej siatki adaptacyjnej.

Odpowiednie zastosowanie siatki pozwala na uzyskanie adaptacyjnych własności prezentowanych reguł kwadraturowych. Pierwszą własnością jest kontrola błędu adaptacyjnego poprzez dobór odpowiednich parametrów związanych z siatką adaptacyjną do aproksymacji. Po drugie, błąd adaptacyjny jest wyliczalny numerycznie i jest jednostajny ze względu na parametr odpowiadający cenie wykonania opcji koszykowej. Uzyskana aproksymacja ceny wyraża się w postaci ważonej sumy cen opcji ze wzoru Blacka. Uwzględniając błąd adaptacyjny takie podejście stanowi skuteczną metodę aproksymacji implikowanej zmienności i implikowanej korelacji zdefiniowanej dla opcji koszykowej. Wspomniane właściwości mogą być wykorzystane w ramach kalibracji modelu w oparciu o kwotowania opcji waniliowych (na pojedyncze aktywa) oraz opcje na koszyk tych aktywów (np. opcje na indeks) i wyceniać takie instrumenty w sposób konsystentny.

Na koniec przedstawiamy wyniki numeryczne testując przedstawioną metodę numeryczną z standardowymi metodami stosowanymi do wyceny opcji koszykowych, takich jak Monte Carlo z redukcją wariancji czy quasi Monte Carlo z użyciem ciągów punktów o niskiej dyskrepancji. Testy przeprowadzone dla reprezentatywnych zestawów parametrów i rozsądnych ograniczeń numerycznych dowodzą użyteczności siatek adaptacyjnych w praktycznych zastosowaniach.

Rafał Muchorski