Białystok, 11 czerwca 2021

Bartosz Kwaśniewski,
Wydział Matematyki,
Uniwersytet w Białymstoku
K. Ciołkowskiego 1M
15-245 Białystok

Recenzja pracy doktorskiej mgr. inż. **Jakuba Kośmidra**
"**m-Izometryczność w wybranych klasach operatorów oraz zagadnienia pokrewne**"
napisanej pod kierunkiem
dr. hab. Zenona Jana Jabłońskiego

1) Problematyka podjęta w recenzowanej rozprawie i jej znaczenie

Operatory m-izometryczne, czy też *m-izometrie* zostały zdefiniowane przez Aglera [2] jako operatory ograniczone $T \in B(H)$ na przestrzeni Hilberta H spełniające równanie

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k} T^{*k}T^k = 0.$$

W latach 1995-1996, w serii prac [3, 4, 5], Agler i Stankus wykazali m.in., że modelowymi przykładami m-izometrii są operatory mnożenia przez z na ważonych przestrzeniach Sobolewa funkcji analitycznych (uzupełnień przestrzeni funkcji analitycznych na okręgu, w normie zadanej przez z operator różniczkowy o wartościach w przestrzeni dystrybucji), a 2-izometrie pojawiają się w naturalny sposób i pełnią ważną rolę w teorii ruchów Browna. Prace te spotkały się ze sporym zainteresowaniem (łącznie około 300 cytowań).

Zasadniczym tematem omawianej rozprawy doktorskiej są twierdzenia charakteryzujące i pozwalające konstruować operatory m-izometryczne w klasach przesunięć ważonych na drzewach skierowanych [42], w tym na specjalnej klasie drzew oznaczanej $\mathcal{T}_{\eta,\kappa}$, oraz operatorów kompozycji na pewnym grafie z jedną pętlą [22]. Otrzymane wyniki pozwalają konstruować i analizować konkretne przykłady (kontrprzykłady) m-izometrii i operatorów z nimi związanych. Ponadto autor dowodzi ogólne twierdzenie charakteryzujące m-izometryczne operatory jednostronnego przesunięcia z wagami operatorowymi (odwracalnymi i wzajemnie przemiennymi) za pomocą miar spektralnych, a także charakteryzuje ogólnie m-izometrie posiadające rozkład typu Wolda. Dodatkowym zagadnieniem omawianym w rozprawie, luźno związanym z pozostałą tematyką, jest unitarna równoważność dwustronnych przesunięć ważonych z wagami operatorowymi. Te ostatnie, to wyniki z opublikowanego artykułu autora [45].

Podjęta problematyka badawcza dotyczy teorii operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta i w naturalny sposób wpisuje się w tematykę badań prowadzonych w Katedrze Analizy Funkcjonalnej na Uniwersytecie Jagiellońskim. W szczególności, ponad jedna czwarta pozycji w bibliografii jest (współ-)autorstwa przedstawicieli tejże katedry, i na pewno omawiane badania będą przez nich kontynuowane. W mojej ocenie wszystkie przedstawione wyniki są publikowalne w co najmniej średniej lub dobrej klasy czasopismach (wyniki jednego z rozdziałów są opublikowane w Opuscula Math [45] i posiadają już jedno cytowanie przez pracownika Katedry Analizy Funkcjonalnej). Ponadto widać tu spory potencjał do dalszych badań, co może być in plus jeśli chodzi o znaczenie prezentowanych wyników w przyszłości.

2) Szczegółowa ocena merytoryczna poszczególnych części rozprawy

Rozprawa składa się z 7 rozdziałów, których wspólnego mianownika (m.in. ze względu na rozdział ostatni) szukałbym w ogólnie pojętych ważonych operatorach przesunięcia na przestrzeniach Hilberta.

Rozdział 1 (Wprowadzenie). Autor szczegółowo i bardzo poprawnie przedstawia historię badań prowadzących do wyników jego rozprawy. Zwiększyłbym tu jedynie nacisk na tytułowe pojęcie m-izometrii, jego rolę i podstawowe przykłady. W szczególności definicja m-izometrii pojawia się dopiero w Rozdziale 2 na stronie 20 i to w sposób zawoalowany notacyjnie, a nie jest to (jeszcze) pojęcie klasyczne. Mi osobiście nie było znane.

Rozdział 2 (Podstawowe fakty i definicje). Autor przedstawia notację i wybrane twierdzenia, które są ważne same w sobie lub są wykorzystywane w dalszej części pracy. Mimo, iż jest to krótki i zwięźle napisany rozdział, to autorowi w zasadzie udało się uniknąć encyklopedycznego wypisania listy pojęć i twierdzeń. Zaletą utworzenia tego rozdziału jest, że wyraźnie oddziela on rezultaty znane od wyników autora. Wada jest taka, że czasami zmusza czytelnika, do przeszukiwania tekstu w celu odnalezienia danej definicji. Niektóre bardziej specyficzne definicje takie jak typu $\mathcal{T}_{\eta,\kappa}$ można by wprowadzić, lub przypomnieć tuż przed ich użyciem, szczególnie, że autor tak właśnie robi np. z $\mathcal{T}_\kappa$ (więc brak tu konsekwencji).

Rozdział 3 (m-izometryczne przesunięcia ważone) Nie wiem czemu autor zaczyna ten rozdział od technicznego Lematu 3.1. Lemat ten jak i definicję klasy $\mathcal{T}_\kappa$ przeniósłbym przed Stwierdzenie 3.9, gdzie dopiero klasa $\mathcal{T}_\kappa$ zaczyna odgrywać pewną rolę.

W naturalny sposób rozdział ten powinien zaczynać się od Twierdzenia 3.2, które przedstawia bardzo ogólną (i przez to niezbyt głęboką) charakteryzację m-izometrycznych przesunięć ważonych na drzewach skierowanych za pomocą wielomianów dla elementów bazowych. Jako wnioski autor omawia szczególne sytuacje dla klasycznego jednostronnego i dwustronnego przesunięcia z wagą otrzymane wcześniej w pracy [1]. Bardziej konkretne i zaawansowane technicznie charakteryzacje autor dowodzi dla specjalnych rodzajów drzew typu $\mathcal{T}_\kappa$ czy $\mathcal{T}_{\eta,\kappa}$. Dla tych ostatnich otrzymuje procedurę konstrukcji wszystkich możliwych ograniczonych m-izometrycznych przesunięć z wagami niezerowymi. Te wyniki oparte są na wspólnej pracy z promotorem [44].

Na koniec rozdziału, krótka Podsekcja 3.2 przedstawia charakteryzację jednostronnych przesunięć ważonych z wagami operatorowymi (odwracalnymi, dodatnimi, komutującymi) w języku miar spektralnych. Wynik ten w przeciwieństwie do poprzednich wydaje się mieć charakter bardziej teoretyczny, Twierdzenie 3.17 nie jest wykorzystywane w dalszej części pracy.

Rozdział 4 (m-izometryczne operatory komopozycji na grafach z jedną pętlą). W tym rodziale rozpatrywane są operatory kompozycji z bardzo specyficznym odwzorowaniem na przestrzeni dyskretnej. Operatory te tworzą specjalną podklasę ważonych operatorów przesunięcia na grafie z jedną pętlą i jednym punktem rozgałęzienia. Prezentowane wyniki oparte są na wspólnej pracy z promotorem [43], a rozumowania opierają się głównie na szeregu rachunków i faktach z algebry liniowej. Oprócz m-izometryczności przedstawione są tu m.in. kryteria analityczności i subnormalności operatora dualnego Cauchy.

Wydaje się, że motywacją do tych badań, o czym autor milczy, jest problem S. Chavana z 2007 r., który pytał, czy operator dualny Cauchy'ego do operatora całkowicie hiperekspansywnego jest subnormalną kontrakcją, a który był rozwiązany negatywnie w [7], za pomocą ważonych przesunięć na drzewach skierowanych.

Rozdział 5 (Problemy uzupełnień do m-izometrii). W tym rozdziale zawarte są twierdzenia uzupełniające poprzednie wyniki o warunki na to, aby wagi początkowe dało się uzupełnić tak, żeby ważony operator przesunięcia był m-izometrią dla jednostronnych przesunięć ważonych z wagami operatorowymi, przesunięć ważonych na drzewach skierowanych klasy $\mathcal{T}_{\eta,\kappa}$ oraz przesunięć ważonych na grafach z jedną pętlą (głównie 2-izometrie).

Rozdział 6 (Rozkład typu Wolda dla m-izometrii). Autor uogólnia charakteryzację 2-izometrii posiadających rozkłada typu Wolda z pracy [7], na przypadek analitycznych m-izometrii. W tym celu wprowadza i analizuje warunek, który nazywa k-kernel condition. Głównymi narzędziami analizy są tu klasyczne metody teorii operatorów. Ponadto autor stosuje swoją charakteryzację do operatorów kompozycji na przestrzeni dyskretnej i pokazuje, że 2-izometrie na grafie z jedną pętlą nigdy nie posiadają rozkładu Wolda.

Otrzymane wyniki są interesujące, przy czym należy tu podkreślić, że zasadnicze twierdzenie nie jest sensu stricto uogólnieniem analogicznego rezultatu z [7] dla 2-izometrii, gdyż dowód tego pierwszego pracuje tylko dla operatorów analitycznych. Czy charakteryzacja zachodzi dla dowolnych m-izometrii pozostaje pytaniem otwartym.

Rozdział 7 (Unitarna równoważność dwustronnych przesunięć ważonych). Autor wykazał, że każdy dwustronny operator przesunięcia z wagami quasi-odwracalnymi jest unitarnie równoważny takiemu operatorowi z wagami dodatnimi, a nawet diagonalnymi jeśli wagi są normalnymi i przemiennymi macierzami skończonymi. Ponadto autor dokładnie studiuje zagadnienie, kiedy operator unitarny splatający dwustronne przesunięcia z wagą jest diagonalny, lub posiada co najwyżej dwie niezerowe diagonale. Te wyniki są opublikowane w [45] i wpisują się w ogólny nurt klasycznej teorii operatorów.

Autor bardzo dobrze się orientuje w literaturze związanej z tematem. W rozumowaniach stosuje głównie klasyczne metody teorii operatorów i algebry liniowej (np. własności rzędu dla macierzy cyrkulantnych) oraz elementy matematyki dyskretnej. Wykazuje się sporą sprawnością rachunkową.

3) Strona redakcyjna i formalna rozprawy.

Struktura pracy jest przemyślana i dobrze scala różne zagadnienia rozważane w rozprawie. Niemniej jednak mi osobiście nie przeszkadzałoby, gdyby był to zbiór oddzielnych artykułów [43-46] opatrzonych wstępem. Pozwoliłoby to uniknąć niektórych nieco sztucznych rozwiązań takich jak mieszanie rozważań o jednostronnych operatorach przesunięcia z wagami operatorowymi z bardzo szczególnymi przypadkami ważonych operatorów na drzewach skierowanych, czy operatorów kompozycji na grafach z jedną pętlą. Co ważniejsze pozwoliłoby to uniknąć zamieszania notacyjnego: np. drzewa typu $\mathcal{T}_{\eta,\kappa}$ są formalnie zdefiniowane na stronie 17, a rysunek je obrazujący dopiero ma stronie 30.

Od strony językowej recenzowana dysertacja doktorska może zostać dobrze oceniona. Jest napisana w sposób jasny, w większości dojrzałym językiem naukowym odpowiednim do tego typu rozprawy. Jedyny poważany zarzut - rzecz, która mnie bardzo raziła, to użycie słowa ;„Propozycja" w miejsce angielskiego słowa „Proposition", którego odpowiednikiem powinno być „Stwierdzenie". Unikałbym również zwrotów typu „Poniższy lemat wykorzystamy w dalszej części pracy" (patrz np. strona 54), które nie wnoszą żadnej treści. Podobnie ze zwrotami mocno nacechowanymi emocjonalnie „bardzo interesujące", czy „bardzo ciekawy" (strona 7), które mają wydźwięk nieco kolokwialny. Jak zawsze w tego typu rozprawach można w tekście znaleźć pewną ilość literówek i oczywistych drobnych błędów. Natomiast rozumowania matematyczne i dowody przeprowadzane są w sposób jasny i poprawny.

Powyższe uwagi nie wpływają istotnie na mój ogólnie bardzo dobry odbiór tekstu rozprawy.

4) Uwagi i potencjalne pytania problemowe.

Podczas lektury dysertacji narzuca się szereg naturalnych pytań natury naukowej. Chciałbym tu zwerbalizować tylko dwa ogólnie postawione problemy:

1) Słynne Twierdzenie Coburna mówi, że każda C^*-algebra generowana przez 1-izometrię jest kanonicznie izomorficzna z algebrą Toeplitza. Klasyczny dowód bazuje na rozkładzie Wolda. W związku z tym i wynikami rozprawy doktorskiej zachodzi naturalne pytanie

   Czy istnieje analogon Twierdzenia Coburna dla m-izometrii (analitycznych spełniających $(m-1)$-kernel condition)?

   Nie sugeruję, że doktorant powinien na to pytanie udzielić odpowiedzi. Sygnalizuję tylko, że jakkolwiek pozytywna odpowiedź na to pytanie, mogłaby się stać przyczynkiem do ciekawej i ważnej pracy badawczej.

2) Jedną z klasycznych metod badania własności ważonych operatorów kompozycji na ogólnych (niekoniecznie dyskretnych) przestrzeniach $L_2(\mu)$ jest tak zwana metoda dyskretyzacji sprowadzająca dane badania do ważonych operatorów aC_φ kompozycji na przestrzeniach dyskretnych $\ell_2(V)$ związanych z (częściowym) odwzorowaniem dyskretnym φ. Przestrzeń $\ell_2(V)$ rozpada się na podprzestrzenie redukujące aC_φ związane z orbitami $\mathcal{O}(x) := \{y : \varphi^n(x) = \varphi^m(y),\ n,m \in \mathbb{Z}_+\}$. Jeśli x jest punktem nieokresowym, to obcięcie aC_φ do $\ell_2(\mathcal{O}(x))$ jest ważonym operatorem przesunięcia na drzewie skierowanym. Natomiast gdy x jest punktem okresowym, to $\mathcal{O}(x)$ jest *ogólnym grafem skierowanym z jedną pętlą*, a którego szczególnym przypadkiem są grafy rozpatrywane w dysertacji.

   Dlaczego w pracy rozpatruje się operatory kompozycji na tak specyficznym grafie? Czy nie dałoby się uogólnić Twierdzenia 4.9 na przypadek ważonych przesunięć na ogólnych grafach z jedną pętlą?

Odpowiedź twierdząca na to drugie pytanie, wraz z wynikami autora dotyczącymi ważonych operatorów przesunięcia na drzewach skierowanych, pozwoliłaby scharakteryzować m-izometryczne ważone operatory przesunięcia na ogólnych przestrzeniach $L_2(\mu)$.

5) Wnioski i konkluzja końcowa.

Moja ogólna opinia o rozprawie jest bardzo pozytywna. Stwierdzam, że przedłożona mi do recenzji dysertacja doktorska spełnia warunki określone w ustawie z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (t.j. Dz. U. 2017, poz. 1789). Stanowi oryginalne rozwiązanie szeregu problemów związanych z m-izometrycznością i teorią ważonych operatorów przesunięcia. Wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną Doktoranta w dyscyplinie matematyki, a zwłaszcza w teorii operatorów, i potwierdza umiejętność Doktoranta w zakresie samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Niniejszym wnioskuję do Rady Dyscypliny Matematyka Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie o dopuszczenie mgr. inż. Jakuba Kośmidra do dalszych etapów przewodu doktorskiego.