Dr hab. Rostyslav Hryniv
Instytut Matematyki
Kolegium Nauk Przyrodniczych
Uniwersytet Rzeszowski

Rzeszów, 15 listopada 2021 r.

Recenzja pracy doktorskiej mgr. Jakuba Kośmidra pt. *"m-Izometryczność w wybranych klasach operatorów oraz zagadnienia pokrewne"*

Rozprawa doktorska Pana mgr. Jakuba Kośmidra została wykonana na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie pod kierunkiem dr hab. Zenona Jana Jabłońskiego. Praca składa się ze streszczenia (w językach polskim oraz angielskim), siedmiu rozdziałów, bibliografii (65 źródeł) i zawiera 81 stronę.

Praca poświęcona jest badaniu własności szerokiej klasy operatorów w przestrzeni Hilberta, w szczególności operatorów m-izometrycznych w klasach przesunięć ważonych na drzewach skierowanych lub operatorów kompozycji na grafach z pętlami. Mianowicie, autor skupia się na kilku istotnych zagadnieniach, w tym

- charakteryzacja m-izometrycznych przesunięć ważonych na drzewach skierowanych o wagach skalarnych lub operatorowych;
- charakteryzacja m-izometrycznych operatorów kompozycji na grafach z jedną pętlą;
- problem uzupełnienia do m-izometrii w klasach przesunięć ważonych na drzewach skierowanych lub operatorów kompozycji na grafach z jedną pętlą;
- posiadanie rozkładu typu Wolda przez analityczne m-izometrie;
- unitarna równoważność dwustronnych przesunięć ważonych o wagach operatorowych.

W zasadzie, te zagadnienia są rozstrzygane w poszczególnych rozdziałach 3–7. Należy wymienić, że chociaż w rozdziale pierwszym autor podaje tło historyczne i dość szczególne wprowadzenie do tematyki badań, cel pracy nie został wymieniony w sposób jawny. Można wywnioskować, że takim celem jest uogólnienie różnych znanych wyników dla operatorów 2-izometrycznych, i wtedy wartowało by podkreślić na czym polegają takie uogólnienia i jaki wpływ mogą mieć na dalszy rozwój tej tematyki. Natomiast we wprowadzeniu autor po prostu podaje szczególny spis treści każdego rozdziału i wymienia udowodnione twierdzenia. Składa to wrażenie o niniejszej rozprawie doktorskiej jako prostej sumie wyników z artykułów, w oparciu na które powstała.

Jest to jedyny zarzut istotny do recenzowanej pracy, która poza tym stanowi przykład bardzo solidnego badania naukowego. Jak już wymieniłem, rozdział pierwszy jest wprowadzeniem do tematu badań oraz zawiera krótkie omówienie otrzymanych rezultatów. W rozdziale drugim podane są podstawowe pojęcia oraz wyniki z zakresu teorii spektralnej, przesunięć ważonych (w tym na drzewach skierowanych), operatorów kompozycji, operatorów m-izometrycznych, rozkładu Wolda i in.

W rozdziale trzecim rozważane zostały problemy charakteryzacji m-izometrycznych przesunięć ważonych na drzewach skierowanych. Mianowicie, twierdzenie 3.2 podaje warunki równoważne do m-izometryczności przesunięć ważonych S_λ w terminach własności ciągu

$(\gamma_{S_{\lambda,e_u}})_n = (\|S_\lambda^n e_u\|^2)_n$. Na podstawie tego twierdzenia oraz kilku lematów i wniosków wyprowadza autor charakteryzację m-izometryczności S_λ w przypadku drzew skierowanych o jednym punkcie rozgałęzienia, jak również algorytm konstrukcji takich przesunięć. Oprócz tego badane są przesunięcia o wagach operatorowych, które są dodatnie oraz przemienne; uogólnia to oczywiście przypadek skalarny.

Rozdział czwarty poświęcony jest operatorom kompozycji C_ϕ na grafach z jedną pętlą. Zauważmy, żę taki operator z definicji 4.3 można również potraktować jako operator przesunięcia na tym grafie skierowanym, ponieważ funkcja ϕ określona w (AS) zgadza się z funkcją par. Dlatego główne wyniki rozdziału 4 charakteryzujące m-izometrie w tej klasie są w pewnym sensie analogiczne do takich wyników rozdziału 3. Ciekawy wynik o możliwości rozszerzenia miary określonej na pętli grafu na pozostałe gałęzie tak, aby operator kompozycji C_ϕ był ograniczoną m-izometrią, podaje propozycja 4.12, co z kolei prowadzi do twierdzenia 4.13 charakteryzującego 2-izometrie oraz 3-izometrie. Dość niespodziewane rezultaty dla operatorów w rozważanej klasie podane są we wnioskach 4.15 oraz 4.19: każdy operator hiperekspansywny z tej klasy jest automatycznie 2-izometrią, a każdy operator m-izometryczny jest również analityczny.

Tematem rozdziału piątego są zagadnienia uzupełnienia skończonego ciągu wag do ciągu takich wag na całym grafie z tym, żeby otrzymany operator przesunięcia ważonego posiadał żądane własności. Rozważane są przypadki wag operatorowych, przesunięć na drzewach z jednym punktem rozgałęzienia oraz na grafach z jedną pętlą.

W rozdziale szóstym rozważane są rozkłady typu Wolda dla operatorów m-izometrycznych, które można potraktować jako bardzo niebanalne uogólnienia klasycznego twierdzenia Wolda. Warunkiem podstawowym w tym rozdziale jest tzw. *k-kernel condition* (nie zrozumiało dlaczego nie zaproponował autor odpowiednika tego pojęcia w języku polskim); warunki równoważne w przypadku lewo-odwracalnego operatora kompozycji na przestrzeni z miarą dyskretną podane są w twierdzeniu 6.8, rolę k-kernel condition dla posiadania rozkładu typu Wolda przez analityczną izometrie wyjaśnia twierdzenie 6.10. Wnioskiem otrzymanych wyników jest rozwiązanie problemu z artykułu [10] o takim rozkładzie w klasie ekspansywnych m-izometrii. Kolejne istotne wyniki w tym rozdziale to warunki na unitarną równoważność jednostronnemu przesunięciu ważonemu o wagach operatorowych; jako przykład zastosowania wykazano, że m–izometryczne operatory kompozycji na grafach z jedna pętlą nie są unitarnie równoważne takim przesunięciom.

Ostatni rozdział poświęcony jest problemu unitarnej równoważności dwustronnych przesunięć ważonych o wagach operatorowych. Jawną charakteryzację takich przesunięć w przypadku operatora unitarnego U postaci diagonalnej daje Twierdzenie 7.3; ciekawym jest uogólnienie na przypadek operatorów U o dwóch niezerowych przekątnych; wówczas te elementy niezerowe w U są to izometrie częściowe. Udowodniono również, że w przypadku n-wymiarowej przestrzeni H unitarny operator U może posiadać co najwyżej n niezerowe diagonale.

Należy podkreślić, że autor podaje w prawie każdym rozdziale przykłady zastosowań wyników teoretycznych. Właśnie możliwość konstruowania licznych przykładów operatorów o różnych żądanych własnościach oraz kontr-przykładów w rozważanych klasach może stanowić jedną z istotnych motywacji do przeprowadzonych badań.

Po opracowaniu rozprawy doktorskiej jestem zdania że jej autor dysponuje wysoką kulturą matematyczną i dobrą wiedzą w zakresie teorii operatorów. Dowody wszystkich tez są na ogół kompletne i poprawne (na ile zdążyłem to zweryfikować); praca napisana jest w sposób jasny i pod względem edytorskim robi bardzo dobrze wrażenie. Znalazłem jedynie parę drobnych literówek i błędów językowych (np. *i nie sposób go wywnioskować* (str. 9), *w taki sposób, był* γ_n *jest ...* (str. 19), *a co z za tym idzie* (str. 65), *prze operator* (str. 76), *operatorów ortogonalnych* (str. 77) i in.). Trochę brakuje opinii autora o własnym dorobku i na ile dowody głównych tez wymagały podejścia nowatorskiego a czy raczej były tradycyjne w tej dziedzinie. Jako wniosek najważniejszy rozprawy doktorskiej należy uznać uzupełnienie w sposób istotny wiedzy o operatorach m-izometrycznych w klasach przesunięć ważonych na drzewach skierowanych oraz operatorach kompozycji na grafach z pętlami oraz zilustrowanie wyprowadzonych twierdzeń teoretycznych na nietrywialnych przykładach.

Biorąc pod uwagę powyżej wymienione oceny i komentarze, uważam, że rozprawa doktorska Pana mgr. Jakuba Kośmidra pt. *"m-Izometryczność w wybranych klasach operatorów oraz zagadnienia pokrewne"* spełnia wszystkie formalne wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnioskuję o dopuszczanie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.