Uniwersytet Jagielloński
Wydział Matematyki i Informatyki
Michał Lipiński

Teoria Morse'a-Conley'a-Forman'a uogólnionych pól multiwektorowych dla skończonych przestrzeni topologicznych

Promotor: prof. dr hab. Marian Mrozek
Promotor pomocniczy: dr Mateusz Juda

Streszczenie

W niniejszej pracy prezentujemy uogólnioną teorię pól multiwektorowych, która w swej pierwszej postaci została przedstawiona w [1]. Bezpośrednim poprzednikiem teorii pól multiwektorowych jest teoria kombinatorycznych pól wektorowych Robina Formana, która z kolei wywodzi się bezpośrednio z dyskretnej teorii Morse'a. Jednym z celów tej rozprawy jest stworzenie kombinatorycznego odpowiednika pól wektorowych obecnych w teorii ciągłych układów dynamicznych oraz stworzenie odpowiednich narzędzi do ich analizy.

U podstaw uogólnienia opisywanej teorii leżą trzy fundamentalne modyfikacje założeń. Po pierwsze, definiujemy pola multiwektorowe dla szerszej rodziny skończonych przestrzeni topologicznych, w przeciwieństwie do [1], gdzie konstrukcja dotyczyła kompleksów Lefschetza. Po drugie, odrzucamy wymaganie istnienia unikalnego elementu maksymalnego w multiwektorze. W rezultacie jedynym elementem definicji multiwektora jest założenie o jego lokalnej domkniętości. Uzyskujemy w ten sposób znaczną elastyczność w konstruowaniu pola multiwektorowego. Po trzecie, została uproszczona definicja odwzorowania wielowartościowego indukowanego przez pole multiwektorowe i reprezentującego kombinatoryczną dynamikę. Przekłada się to na uproszczenie dowodów i algorytmicznego aspektu wyznaczania rozkładów Morse'a oraz prowadzi do nowej interpretacji multiwektora jako dynamicznej "czarnej skrzynki".

Przy nowych założeniach teorii definiujemy kombinatoryczne odpowiedniki obiektów znanych z teorii ciągłych układów dynamicznych oraz badamy ich własności. Wśród nich mamy: zbiór izolowany niezmienniczy, parę indeksową, indeks Conley'a, zbiory graniczne, atraktor, czy rozkład Morse'a. Pokazujemy również pożądane własności jakich oczekiwalibyśmy od wymienionych wyżej obiektów, m.in. addytywność indeksu Conley'a oraz nierówności Morse'a. Nowe założenia pociągają za sobą konieczność przeprowadzenia nowych dowodów wszystkich własności.

W dalszej części pracy korzystamy z podstawowego narzędzia topologicznej analizy danych, tj. homologii persystetnych, do analizy strukturalnej trwałości zbiorów Morse'a. W tym celu konstruujemy moduł persystentny zygzak dla słabych rozkładów Morse'a oraz rozkładów Morse'a.

Następnie prezentujemy eksperymenty numeryczne bazujące na omawianej w tej rozprawie teorii. Przedstawiamy algorytm konstrukcji pola multiwektorowego z chmury wektorów. W szczególności uzyskujemy je poprzez próbkowanie wybranych ciągłych układów dynamicznych. W jednym z eksperymentów odtwarzamy graf Conley'a-Morse. Natomiast w kolejnych przykładach korzystamy z homologii persystentnych w celu zbadania ewolucji struktury zbiorów Morse'a względem wybranego parametru modyfikującego dynamikę. Eksperymenty prezentują potencjał dalszego wykorzystania wypracowanych narzędzi do analizy danych o dynamicznej naturze.

[1] M. Mrozek. Conley-Morse-Forman theory for combinatorial multivector fields on Lefschetz complexes. *Found. Comput. Math.*, 17(6):1585–1633, 2017.

Michał Lipiński

Jagiellonian University
Faculty of Mathematics and Computer Science
Michał Lipiński

Morse-Conley-Forman theory for generalized combinatorial multivector fields on finite topological spaces

Supervisor: prof. dr hab. Marian Mrozek
Secondary supervisor: dr Mateusz Juda

Summary

In this work, we present a generalization of the theory of multivector fields first introduced in [1]. The direct predecessor of the multivector fields theory is the theory of combinatorial vector fields by Robin Forman. His work, in turn, is a natural consequence of a discrete Morse theory. One of the main goals of this thesis is to construct a combinatorial counterpart of vector fields induced by continuous dynamical systems and to create tools for its analysis.

The generalization involves three fundamental changes in the setting of the theory. First, we define multivector fields for a broader family of finite topological spaces, in comparison to [1] where Lefschetz complexes are used. Secondly, we lift the assumption that a multivector must have a unique maximal element. Thus, a multivector simply becomes a locally closed subset of space. This results in a greater flexibility in constructing multivector fields. Finally, we define less restrictively the multivalued map induced by a multivector field that defines a combinatorial dynamical system. Consequently, we can simplify the computational aspects of the theory, and we can introduce a new interpretation of a multivector as a dynamical "black box."

With a new setting of the multivector fields theory, we define combinatorial counterparts of multiple objects from the classical theory of dynamical systems; among others: isolated invariant set, index pair, Conley index, limit set, attractor, or Morse decomposition. We also show that the desirable properties as additivity of a Conley index and Morse inequalities hold. Even though the theory's general structure is preserved, new proves and ideas are required by the new setup.

In the further part, we use persistent homology – the topological data analysis main tool, to study the robustness of the structure of Morse sets. In particular, we construct a zigzag persistence module for weak Morse decomposition and Morse decomposition for multivector fields.

Finally, we show some numerical experiments based on the presented theory. We discuss the algorithm for constructing the multivector field from a vector cloud. As a proof of concept, we study vector clouds obtained by sampling chosen continuous vector fields. In the first experiment, we algorithmically reconstruct the Conley-Morse graph. In the further experiments, we use the persistence homology to study Morse sets' evolution with respect to a parameter modifying a dynamic. These experiments show the potential of the multivector fields theory as a new analysis tool for data with a dynamical nature.

[1] M. Mrozek. Conley-Morse-Forman theory for combinatorial multivector fields on Lefschetz complexes. *Found. Comput. Math.*, 17(6):1585–1633, 2017.

Michał Lipiński