UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4 61–614 Poznań

Tel: 61 829 53 08 Fax: 61 829 53 15 E-mail: wmi@amu.edu.pl

Poznań, 10 czerwca 2021 r.

Recenzja rozprawy w przewodzie doktorskim mgr. Jacka Trepkowskiego pt. „Aluthge transforms of unbounded operators"

W pracy ([Alu90]; numeracja z bibliografii rozprawy doktorskiej), która ukazała się w roku 1990, Ariyadasa Aluthge zdefiniował na przestrzeni operatorów ograniczonych na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, przekształcenie

$$T \mapsto \widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}U|T|^{\frac{1}{2}},$$

gdzie $T = U|T|$ jest rozkładem biegunowym operatora T. Przekształcenie to obecnie jest nazywane *przekształceniem Aluthgego*. W tej pracy Aluthge wykazał m.in., że jeżeli operator T jest p-hiponormalny, gdzie $p \leq \frac{1}{2}$, to jego transformata $\widetilde{T}$ jest operatorem $(p + \frac{1}{2})$-hiponormalnym.

W kolejnej pracy ([Alu96]) Aluthge badał uogólnienie tego przekształcenia w postaci

$$\mathcal{A}_t(T) = |T|^t U|T|^{1-t},$$

gdzie $t \in (0, 1]$.

Po ukazaniu się prac Aluthgego przekształcenie $\mathcal{A}_t$ zaczęło być obiektem zainteresowaniu wielu autorów. Badano m.in., związki pomiędzy widmem i częściami widma oraz obrazem liczbowym operatora T i jego transformaty Aluthgego, zbieżności ciągu iteracji operatora $\mathcal{A}_t$, jak również problemu podprzestrzeni niezmienniczej. Wszystkie te prace dotyczyły operatorów ograniczonych.

Przekształcenie Aluthgego dla operatorów nieograniczonych zostało po raz pierwszy zdefiniowane w pracy Pana Trepkowskiego [Tre15]. Badane jest w niej przekształcenie Aluthgego dla operatorów domkniętych i gęsto określonych. Praca ta zawiera ciekawy przykład nieograniczonego operatora ważonego przesunięcia S_λ, którego transformata Aluthgego, $\mathcal{A}_t(S_\lambda)$ ma trywialną dziedzinę oraz $\mathcal{A}_t(S_\lambda^*)$ nie jest operatorem domykalnym. W kolejnej pracy ([BBT20]), wspólnej z C. Benhidą i P. Budzyńskim, badane jest przekształcenie Aluthgego w klasie nieograniczonych ważonych operatorów kompozycji na przestrzeniach L^2.

Rozprawa doktorska Pana Trepkowskiego dotyczy przekształcenia Aluthgego operatorów nieograniczonych. Zawarte są w niej wyniki z wyżej wymienionych prac

[Tre15] i [BBT20] z pewnymi modyfikacjami i uzupełnieniami. Omówię pokrótce jej treść. Składa się ona ze wstępu, czterech rozdziałów i dwóch dodatków.

Wstęp zawiera rys historyczny oraz zwięzły opis najważniejszych faktów i wyników przedstawionych w dalszej części rozprawy.

Rozdział pierwszy zatytułowany „Preliminaries" jest dość obszernym wprowadzeniem w tematykę operatorów nieograniczonych na przestrzeni Hilbeta. Zawiera on podstawowe oznaczenia, definicje i twierdzenia dotyczące tej klasy operatorów takie jak: sprzężenie, rozkład biegunowy, widmo i rachunek funkcyjny, relacja porządku dla operatorów samosprzężonych, nierówność Löwnera-Heinza oraz różne typy operatorów „prawie" normalnych.

Główna część rozprawy składa się z rozdziałów drugiego, trzeciego i czwartego. W rozdziale drugim „Generalized Aluthge transforms", Autor uogólnia definicję transformaty Aluthego $\mathcal{A}_t(T)$ na klasę operatorów nieograniczonych, domkniętych i gęsto określonych oraz opisuje podstawowe własności tego przekształcenia porównując je z analogicznymi własnościami zachodzącymi w przypadku, gdy T jest operatorem ograniczonym. Rozważane są problemy związane z hiponormalnością transformaty $\mathcal{A}_t(T)$, własnościami spektralnymi i punktami stałymi tego przekształcenia. Uzyskane przez Autora oryginalne wyniki to odpowiednio twierdzenia 2.24, 2.30 i 2.33.

Rozdział trzeci „Weighted composition operators" jest poświęcony w całości nieograniczonym ważonym operatorom kompozycji na przestrzeni L^2. Jest on oparty na wynikach z pracy [BBT20]. Najważniejsze twierdzenia zawarte w tym rozdziale, to:

— Twierdzenie 3.15, które mówi, że transformata $\mathcal{A}_t(C_{\phi,\omega})$ gęsto określonego operatora ważonej kompozycji $C_{\phi,\omega}$ jest operatorem domykalnym i jej domknięcie jest również operatorem ważonej kompozycji z tym samym symbolem ϕ i odpowiednio zmodyfikowaną wagą ω_t.
— Twierdzenie 3.16, w którym podane są warunki równoważne na to, aby operator $\mathcal{A}_t(C_{\phi,\omega})$ był domknięty.
— Twierdzenie 3.26, w którym opisane są warunki konieczne i dostateczne na to, aby operator ważonej kompozycji $C_{\phi,\omega}$ był operatorem p-hiponormalnym.
— Twierdzenie 3.31, które mówi że transformata $\mathcal{A}_t(C_{\phi,\omega})$ operatora p-hiponormalnego $C_{\phi,\omega}$ jest operatorem q-hiponormalnym, gdzie $q = \min\{p+t, 1\}$.

W rozdziale czwartym „Weighted shifts on directed trees" opisane są wyniki, zawarte w pracy [Trep15], dotyczące ważonych operatorów przesunięcia na „drzewach" skierowanych. Scharakteryzowana jest w nim dziedzina transformaty $\mathcal{A}_t(S_\lambda)$ operatora ważonego przesunięcia, wykazane jest, że ten operator jest domykalny i jego domknięcie jest operatorem ważonego przesunięcia (twierdzenie 4.9). Ponadto opisana jest transfomata $\mathcal{A}_t(S_\lambda^*)$ operatora sprzężonego z operatorem S_λ (twierdzenie 4.16). Głównym wynikiem zawartym w tym rozdziale, i według mnie w całej pracy, jest przykład operatora ważonego przesunięcia S_λ, który jest hiponormalny, natomiast jego transformata $\mathcal{A}_t(S_\lambda)$ ma trywialną dziedzinę oraz $\mathcal{A}_t(S_\lambda^*)$ nie jest operatorem domykalnym. Ponieważ skonstruowany w tym przykładzie operator S_λ jest unitarnie równoważny z operatorem kompozycji C na przestrzeni L^2, więc operator C ma te same własności co operator S_λ (twierdzenie 4.23).

Pracę kończą dwa dodatki/uzupełnienia. W pierwszym z nich Autor umiejscawia teorię przekształcenia Aluthgego operatorów nieograniczonych w kontekście algebr von Neumanna, a drugi jest poświęcony dowodowi nierówności Hansena dla operatorów nieograniczonych.

Przejdę teraz do oceny rozprawy doktorskiej. Strona redakcyjna jest bardzo dobra. Praca napisana jest jasno i poprawnie. Obszerna część wstępna ułatwia czytanie tej rozprawy. Praca jest bardzo „techniczna", zawiera mnóstwo dość skomplikowanych wzorów. Pomimo to nie udało mi się w nich znaleźć żadnego błędu, ani nawet „literówki". Nie zauważyłem również żadnych błędów merytorycznych.

W Krakowskiej Szkole Teorii Operatorów jednym z wiodących tematów jest badanie takich własności operatorów nieograniczonych jak: subnormalność, hiponormalność, czy też normalność. Praca doktorska Pana Trepkowskiego wpisuje się w tę tematykę. Zawiera oryginalne rezultaty opublikowane w renomowanych czasopismach. Uważam, że wyniki uzyskane przez Pana Trepkowskiego są bardzo ciekawe i świadczą nie tylko o doskonałym opanowaniu „rzemiosła" przez ich Autora, ale również o Jego niewątpliwym talencie.

Na zakończenie chciałbym dodać, że moim zdaniem praca ta zasługuje na wyróżnienie z następujących powodów:
— Pan Trepkowski jako pierwszy zdefiniował transformatę Aluthgego dla operatorów nieograniczonych i zbadał jej podstawowe własności.
— W sposób wyczerpujący opisał transformatę Aluthgego w klasie operatorów ważonej kompozycji na przestrzeni L^2.
— Skonstruował bardzo ciekawy przykład hiponormalnego operatora ważonego przesunięcia, którego transformata Aluthgego ma trywialną dziedzinę.
— Udowodnił nierówność Hansena dla operatorów nieograniczonych.

Biorąc powyższe pod uwagę, stwierdzam, że **praca doktorska Pana mgr. Jacka Trepkowskiego spełnia wszystkie wymagania stawiane rozprawom doktorskim w Ustawie o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz.U. z 2016 r. poz. 882)** i wnoszę o dopuszczenie jej do publicznej obrony.

Andrzej Sołtysiak

Dr hab. Andrzej Sołtysiak
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza
w Poznaniu