Gdańsk, dnia 30 kwietnia 2021 r.

dr hab. Marcin Marciniak
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki
Uniwersytet Gdański

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Jacka Trepkowskiego pt. „Aluthge transforms of unbounded operators"

Rozprawa doktorska mgr. Jacka Trepkowskiego liczy 93 strony, składa się z czterech rozdziałów, apendiksu oraz bibliografii zawierającej ponad 100 pozycji. Została napisana pod kierunkiem prof. dr. hab. Jana Stochela.

Tematem przewodnim pracy – zgonie z jej tytułem – jest dyskusja własności transformaty Aluthge'a dla operatorów nieograniczonych. Pojęcie transformaty Aluthge dla operatorów ograniczonych zostało zdefiniowane w latach dziewięćdziesiątych ubiegłego stulecia. Transformata ta przyporządkowuje operatorowi T zadanemu w postaci biegunowej operator $\mathcal{A}(T)$ powstały w wyniku przestawienia pierwiastka z modułu operatora z częściową izometrią. Oczywiście, jeśli wyjściowy operator jest normalny (a nawet quasinormalny), to opisana transformacja nie zmienia wyjściowego operatora. Zatem dla dowolnego operatora, różnica między nim a jego transformatą Aluthge'a może służyć do szacowania wielkości odchylenia opratora od quasinormalności. Z drugiej strony, dzięki wynikom Aluthge wiadomo, że transformata ta zachowuje (a nawet poprawia) słabszą od quasinormalności własność hyponormalności.

Celem autora jest zdefiniowanie i systematyczne zbadanie własności transformaty Aluthge dla operatorów nieograniczonych. Oczywiście ten przypadek jest daleko trudniejszy od przypadku ograniczonego. Pojawia się tu masa problemów technicznych do przezwyciężenia takich jak konieczność precyzyjnego określania dziedzin operatorów, rozsztrzyganie o wykonalności dodawania i składania operatorów, czy też fakt, że pojawiające się w rozważaniach operatory nie mają „przyjemnych" własności takich jak np. domykalność. Mając te wszystkie problemy na uwadze autor czyni swoim zadaniem zbadanie, czy trasformata Aluthge'a wykazuje podobne własności, jak w przypadku ograniczonym oraz opis szerokiej klasy przykładów dla ważonych operatorów kompozycji oraz ważonych przesunięć na drzewach skierowanych.

Całość rozprawy poprzedzona jest syntetycznym wstępem, w którym autor stawia główny problem i opisuje główne motywacje.

Rozdział 1 zawiera wprowadzenie do teorii operatorów nieograniczonych na przestrzeniach Hilberta. Opisane są m.in. takie zagadnienia jak domykalność, rozkład biegunowy, elementy teorii spektralnej i rachunku funkcjoinalnego. Przypomniane są również twierdzenia związane ze strukturą porządkową operaorów ograniczonych: nierówność L'ownera-Heinza, nierówność Hansena i nierówność Furuty. Zdefiniowane są również warunki osłabiające warunek normalności: quasinormalność, subnormalność i hyponormalność.

Rozdziały 2, 3 i 4 zawierają wyniki własne pana mgr. Trepkowkiego. Wyniki Rozdziałów 3 i 4 są treścią dwóch publikacji autora: jednej samodzielnej i jednej wieloautorskiej. W każdym z tych rozdziałów autor bardzo zręcznie prezentuje wprowadzenie i przegląd aktualnego stanu wiedzy, po czym płynnie następuje prezentacja wyników autorskich.

Rozdział 2 poświęcony teorii uogólnionej transformaty Aluthge'a dla operatorów nieograniczonych, o których nie zakłada się żadnej specyficznej postaci. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, od razu pojawiają się problemy, bo operator $\mathcal{A}(T)$ nie musi być domykalny. W pierwszej części tego rozdziału autor podaje warunki dostateczne, których nałożenie na gęsto określony doknięty oprator T gwarantuje domykalność operatora $\mathcal{A}(T)$. Pokazuje również, że dla gęsto określonego operatora domkniętego ograniczoność $\mathcal{A}(T)$ implikuje ograniczoność samego T. Kolejna część tego rozdziału poświęcona jest dyskusji własności p-hyponormalności dla operatora $\mathcal{A}_t(T)$. Główny wynik zawarty jest w Twierdzeniu 2.24. Pokazuje on uogólnienie wyników Furuty i Huruya na przypadek p-hyponormalnych operatorów nieograniczonych, dla których operator $\mathcal{A}_t(T)$ jest gęsto określony. Następna część poświęcona jest własnościom spektralnym operatora $\mathcal{A}_t(T)$. Głowne wyniki przedstawione są w Twierdzeniach 2.25 i 2.30. Ciekawy jest wynik z kolejnej części poświęconej charakteryzacji punktów stałych transformaty Aluthge'a. Okazuje się, że podobnie jak w przypadku ograniczonym punktami stałymi tej tarnsformaty są operatory quasinormalne (Twierdzenie 2.33)

W Rozdziale 3 dyskutowane są własności transformaty Aluthge'a dla specjalnej klasy ważonych operatorów kompozycji. Jest to szeroka klasa operatorów, która wcześniej badana była przez prof. Stochela i jego uczniów. Wyniki autora poprzedzone są wstępem opisującym podstawy teorii przestrzeni z miarą i funkcji mierzalnych, a w szczególności pochodnych Radona-Nikodyma i warunkowych wartości oczekiwanych. Do najważniejszych wyników własnych autora należy Twierdzenie 3.15, w którym opisano postać operatora $\mathcal{A}_t(C_{\phi,w})$ i wykazano jego domykalność. Okazuje się, że doknięcie tego operatora należy też do klasy ważonych operatorów kompozycji. W Twierdzeniu 3.16 autor podaje warunki równoważne dokniętości operatora $\mathcal{A}_t(C_{\phi,w})$, zaś w Propozycji 3.20 warunki równoważne gęstości dziedziny. Ukoronowaniem tego rozdziału jest Twierdzenie 3.31, w którym autor pokazuje, że w klasie pewnych ważonych operatorów kompozycji prawdziwy jest wynik Althuge'a o p-hyponormolności dziedziczonej przez transformatę Aluthge'a.

W Rozdziale 4 autor zajmuje się przypadkiem przesunięć ważonych na drzewach skierowanych. Podobnie jak w poprzednim rozdziale znajduje się tutaj wprowadzenie do omawianych zagadnień, które pomaga czytelnikowi śledzić dalsze kroki. Tutaj także opisane są: postać transformaty dla przesunięcia ważonego i dowód jej domykalności (Twierdzenie 4.9) i postać transformaty dla operatora sprzeżonego do przesunięcia ważonego (Twierdzenie 4.16). Jednak kluczowa dla tego rozdziału jest ostatnia część, w której autor opisuje przykład drzewa skierowanego i gęsto określonego przesunięcia ważonego, które jest operatorem hyponormalnym i którego transformata Aluthge'a ma zerową dziedzinę. Co więcej, transformata operatora sprzężonego do tego przesunięcia nie jest operatorem domykalnym.

Rozprawa pana mgr. Trepkowskiego reprezentuje bardzo wysoki poziom naukowy. Uzyskane wyniki może nie są zaskakujące, ale trudno się spodziewać takich wyników w sytuacji, gdy szukamy uogólnień już istniejących twierdzeń. Budzi szacunek systematyczne podejście do problemu i pionierski charakter badań. Według mojej wiedzy nikt wcześniej nie badał konstrukcji Aluthge'a w przypadku operatorów nieograniczonych. Mocną stroną jest też opanowanie zaawansowanych metod analizy funkcjonalnej i teorii miary. Pan Trepkowski sprawnie się nimi posługuje. Dowody niektórych twierdzeń są wysoce nietrywialne, wymagają pomysłowości i biegłości we wspomnianych dziedzinach.

Kolejną zaletą jest strona redakcyjna rozprawy. Układ treści jest bardzo przejrzysty. Wybór treści wprowadzających jest precyzyjny. Znajdują się tutaj rzeczy niezbędne i tylko takie. Trudne i skomplikowane dowody w pomysłowy sposób rozbite są na ciągi krótszych lematów i obserwacji (często ciekawych samych w sobie), co znacznie ułatwia czytelnikowi prześledzenie toku rozumowania. Należy również podkreślić sprawne posługiwanie się językiem angielskim. Na palcach jednej ręki można zliczyć drobne pomyłki drukarskie, które w żadnym stopniu nie utrudniają czytania.

Jak wynika z powyższego, moja opinia o recenzowanej pracy jest bardzo pozytywna. Wyniki są oryginalne i stanowią wkład w rozwój wiedzy o operatorach o operatorach nieograniczonych. Autor stosuje zaawansowane techniki dowodzenia, okazuje sprawność, pomysłowość i bez wątpienia dużą kulturę matematyczną. Uważam, że praca ta spełnia wszelkie ustawowe i zwyczajowe warunki stawiane rozprawom doktorskim. Dlatego wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Jacka Trepkowskiego do dalszych etapów procedury.

Mociuk