Marcin Sroka
streszczenie rozprawy

Monge-Ampère equation in hypercomplex geometry

Przedstawiona rozprawa dotyczy istnienia i regularności rozwiązań kwaternionowego równania Monge'a-Ampère'a, zarówno w sytuacji lokalnej jak i globalnej. Równanie to stanowi odpowiednik rzeczywistego i zespolonego równania Monge'a-Ampère'a odgrywających niebagatelną rolę w analizie i geometrii. Interesująca jest nowa forma nieliniowości tego równania pojawiającego się naturalnie w obecności pewnej struktury geometrycznej – tzw. metryki hiperhermitowskiej. Wyniki przedstawione w rozprawie zostały opublikowane w cyklu prac [Sr18, KS20, Sr19], jedna z których napisana została z moim promotorem. W sytuacji lokalnej, badania nad kwaternionowym równaniem Monge'a-Ampére'a zapoczątkowali niezależnie Alesker, laureat nagrody EMS, [A03a] oraz Harvey i Lawson, laureat nagrody Leroy P. Steele'a, [HL09c] – a zatem matematycy o uznanej reputacji. Następnie zdano sobie sprawę, że kwaternionowy operator Mong'e-Ampère'a odgrywa znacząca rolę w geometrii rozmaitości hiperKählerowskich z torsją. Jest to typ metryk pojawiających się na tzw. "target space" supersymetrycznych $\sigma-$modeli z torsją w mechanice kwantowej, por. [GP00]. Spostrzeżenie to zaowocowało postawieniem przez Aleskera wspólnie z Verbitsky'm (wykład na ICM 2014), nadal nierozstrzygniętego, odpowiednika hipotezy Calabiego dla tych przestrzeni, por. [AV10]. Problem ten sprowadza się do rozwiązania kwaternionowego równania Monge'a-Ampère'a na rozmaitościach hiperKählerowskich z torsją.

Zaczniemy od streszczenia rezultatów zawartych w rozprawie, a otrzymanych w pracach [Sr18, KS20], dla płaskiej przestrzeni $\mathbb{H}^n$, gdzie $\mathbb{H}$ oznacza ciało kwaternionów. Niech $MA_{\mathbb{H}}$ oznacza kwaternionowy operator Monge'a-Ampère'a. Naszym głównym wynikiem jest Twierdzenie 5.3.1 w rozprawie. Gwarantuje ono istnienie i jedyność słabych, w sensie dystrybucyjnym, rozwiązań problemu Dirichleta

$$\begin{cases} u \in \mathcal{QPSH}(D) \cap C^0(\overline{D}) \\ MA_{\mathbb{H}}(u) = f \\ u_{|\partial D} = \phi \end{cases}$$

dla odpowiednich, gładko ograniczonych, obszarów D, ciągłej ϕ oraz $f \in L^p(D)$ dla $p > 2$. Stanowi to najbardziej ogólny wynik na temat tego równania jaki jest znany, jeśli idzie o osobliwość danych początkowych, uogólniający rezultaty Zhu [Z17] dla gładkich danych, Aleskera [A03b] oraz Harvey'a i Lawsona [HL09c, HL20] dla ciągłych, Wan [W18] dla prawej strony w L^p z $p \geqslant 4$. Co więcej wykazujemy, że tego oszacowania na p nie da się już poprawić, tak aby gwarantować istnienie ciągłych rozwiązań. Tym samym otrzymane twierdzenie stanowi odpowiednik rezultatów Alexandrova [Alex58], $p \geqslant 1$, dla rzeczywistego i Kołodzieja [K96], $p > 1$, dla zespolonego równania Monge'a-Ampère'a.

Dowód tego twierdzenie opiera się na wykazaniu C^0 oszacowania a priori. To zaś zasadza się na uzyskaniu nierówności między naturalnie zdefiniowaną pojemnością, zbiorów podpoziomicowych, stowarzyszoną z kwaternionowym operatorem Monge'a-Ampère'a a miarą Lebesque'a w $\mathbb{H}^n$ tych zbiorów. Dowód tego faktu polega na połączeniu kilku składników i jest zupełnie inny niż w sytuacji zespolonego równania. Po pierwsze porównujemy zespolony i kwaternionowego operatora Monge'a-Ampère'a, pomysł ten pochodzi od Chenga oraz Yau dla pary rzeczywistego i zespolonego operatora. Następnie zauważamy, za [DK14], że klasa funkcji na której równanie jest eliptyczne zawiera jako szczególnych reprezentantów funkcje plurisubharmoniczne i za ich pomocą da się zrealizować wspomnianą pojemność. Te dwie obserwacje wystarczają do wykazania wspomnianego oszacowania a priori po zastosowaniu słynnego C^0 oszacowania Kołodzieja dla zespolonego równania Monge'a-Ampère'a z [K96]. Innymi słowy, dowód oszacowania a priori nie jest powtórzeniem dowodu Kołodzieja dla zespolonego równania Monge'a-Ampère'a ale korzysta z tego rezultatu w sposób kluczowy. Nadal nie wiadomo czy da się przeprowadzić dowód porównania pojemności i objętości bez odwoływania się do zespolonych wyników.

Regularność ciągłych rozwiązań znalezionych w powyższym twierdzeniu opisana została w Twierdzeniu 6.5 w rozprawie, wynik został wzięty z [KS20]. Pokazujemy w tym twierdzeniu, że jeśli warunek brzegowy w problemie Dirichleta jest klasy $C^{1,1}$ to rozwiązanie musi być klasy $C^{0,\alpha}$ z ograniczeniem na α podanym w języku p oraz n. Zaznaczamy jednak, że założenia poczynione w tym twierdzeniu są dość słabe albowiem funkcja po prawej stronie równania musi być ograniczona przy brzegu dziedziny.

Kwaternionowe równanie Monge'a-Ampère'a pojawia się naturalnie na zwartych HKT rozmaitościach. Koduje mianowicie możliwość otrzymania każdej trywializacji wiązki kanonicznej na rozmaitości hiperzespolonej z metryki hiperKählerowskiej z torsją, por. [AV10]. Klasa HKT metryk stanowi uogólnienie bardziej klasycznych metryk hiperKählerowskich. Trudności w rozwiązaniu tego równania sprawiają skomplikowane oszacowania a priori które trzeba otrzymać co najmniej do rzędu $C^{2,\alpha}$. Częściowe postępy poczyniono w [AV10, AS13, A13]. Na razie jedynym znanym oszacowanie w ogólnej sytuacji jest to rzędu C^0. Pierwsi otrzymali je Alesker i Shelukhin [AS17]. Przedstawiamy relatywnie prosty dowód tego oszacowania, Twierdzenie 8.1 w rozprawie, który opublikowany został w [Sr19]. Co bardziej znaczące poprawiamy jednocześnie czułość zależności oszacowania od warunków początkowych. Zależy ono teraz tylko od, obok wielkości geometrycznych, L^p normy prawej strony dla dowolnego $p > 2n$ gdzie n jest kwaternionowym wymiarem rozmaitości na której rozwiązujemy problem. Stanowi to odpowiednik C^0 oszacowania otrzymanego przez Yau dla zespolonego równania Monge'a-Ampère'a na rozmaitości Kählerowiej [Y78] oraz Tosatti'ego i Weinkova [TW10b] na rozmaitości hermitowskiej.

Dowód tego oszacowania jest następujący. Polega w pierwszej kolejności na zastosowaniu nierówności Soboleva do potencjalnego rozwiązania u. To wymaga ograniczenia L^2 normy gradientu rozwiązania co stanowi główną trudność. W celu otrzymania słabszego oszacowania, zależnego od rozwiązania, różniczkujemy równanie i "wydobywamy" to słabsze ograniczenie. Udało się je otrzymać dzięki iteracji oszacowań na formy powstające w wyniku tego różniczkowania. Tak otrzymane oszacowanie na gradient umożliwiło przeprowadzenie iteracji Mosera która w połączeniu z kilkoma istotnymi obserwacjami z [TW10a, TW10b] daje pożądane C^0 oszacowanie a priori. Przedstawiona metoda jest silnie inspirowana pracą [TW10b]

Opisane wyniki w przypadku płaskim wzbogacają, zainicjowane w [HL09a, HL09b, HL09c], badania nad bardzo ogólną klasą równań nieliniowych i stowarzyszoną teorią pluripotencjału. Analiza geometryczna na rozmaitościach hermitowskich odniosła wiele sukcesów w minionej dekadzie. W sytuacji związanej z opisywaną rozprawą w zakresie twierdzeń typu Calabiego-Yau dla specjalnych metryk hermitowskich, por. [TW10b, GL10, SzTW17, TW17]. Kwaternionowe równanie Monge'a-Ampère'a wpisuje się w ten nurt na rozmaitościach hiperzespolonych.

Literatura

[A03a] S. Alesker, *Non–commutative linear algebra and plurisubharmonic functions of quaternionic variables*, Bull. Sci. Math. **127**(1), 1–35, 2003.

[A03b] S. Alesker, *Quaternionic Monge–Ampère equations*, J. Geom. Anal. **13**(2), 205–238, 2003.

[A13] S. Alesker, *Solvability of the quaternionic Monge-Ampère equation on compact manifolds with a flat hyperKähler metric*, Adv. Math., **241**, 192–219, 2013.

[AS13] S. Alesker, E. Shelukhin, *On a uniform estimate for the quaternionic Calabi problem*, Isr. J. Math., **197**(1), 309–327, 2013.

[AS17] S. Alesker, E. Shelukhin, *A uniform estimate for general quaternionic Calabi problem (with appendix by Daniel Barlet)*, Adv. Math., **316**, 1–52, 2017.

[AV10] S. Alesker, M. Verbitsky, *Quaternionic Monge–Ampère equations and Calabi problem for HKT-manifolds*, Israel J. Math., **176**, 109–138, 2010.

[Alex58] A. D. Alexandrov, *Dirichlet's problem for the equation Det* $\| \ z_{ij} \ \|= \Phi(z_1, ..., z_n, z, x_1, ..., x_n)$*,I*, Vestnik Leningrad Univ. Ser. Mat. Mekh. Astr., **13**(1), 5–24, 1958.

[DK14] S. Dinew, S. Kołodziej, *A priori estimates for the complex Hessian equations*, Anal. PDE, **7**, 227–244, 2014.

[GP00] G. Grantcharov, Y. S. Poon, *Geometry of hyper–Kähler connections with torsion*, Comm. Math. Phys., **213**(1), 19–37, 2000.

[GL10] B. Guan, Q. Li, *Complex Monge-Ampére equations and totally real submanifolds*, Adv. Math., **225**(3), 1185–1223, 2010.

[HL09a] F. R. Harvey, H. B. Lawson Jr, *An Introduction to Potential Theory in Calibrated Geometry*, Amer. J. Math., **131**(4), 2009.

[HL09b] F. R. Harvey, H. B. Lawson Jr, *Duality of Positive Currents and Plurisubharmonic Functions in Calibrated Geometry*, Amer. J. Math., **131**(5), 2009.

[HL09c] F. R. Harvey, H. B. Lawson Jr, *Dirichlet Duality and the Nonlinear Dirichlet Problem*, Comm. Pure App. Math., **62**, 2009.

[HL20] F. R. Harvey, B. L. Lawson Jr., *The inhomogeneous Dirichlet Problem for natural operators on manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **69**(7), 3017–3064, 2019.

[HKLR87] N.J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström, M. Roček, *Hyper-Kähler metrics and supersymmetry*, Commun. Math. Phys., **108**, 535–589, 1987.

[K96] S. Kołodziej, *Some sufficient conditions for solvability of the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère operator*, Ann. Polon. Math., **65**, 11–21, 1996.

[KS20] S. Kołodziej, M. Sroka, *Regularity of solutions to the quaternionic Monge-Ampére equation*, J. Geom. Anal., **30**(3), 2852–2864, 2020.

[Sr18] M. Sroka, *Weak solutions to the quaternionic Monge–Ampére equation*, to appear in Analysis & PDE

[Sr19] M. Sroka, *The* C^0 *estimate for the quaternionic Calabi conjecture*, Adv. Math, **70**, Article 107237, 2020.

[SzTW17] G. Szekelyhidi, V. Tosatti, B. Weinkove, *Gauduchon metrics with prescribed volume form*, Acta Math., **219**(1), 181–211, 2017.

[TW10a] V. Tosatti, B. Weinkove, *Estimates for the Complex Monge-Ampère Equation on Hermitian and Balanced Manifolds*, Asian J. Math., **14**(1), 19–40, 2010.

[TW10b] V. Tosatti, B. Weinkove, *The complex Monge-Ampère equation on compact Hermitian manifolds*, J. Amer. Math. Soc., **23**(4), 1187–1195, 2010.

[TW17] V. Tosatti, B. Weinkove, *The Monge-Ampère equation for* $(n-1)$*–plurisubharmonic functions on a compact Kähler manifold*, J. Amer. Math. Soc., **30**, 311–346, 2017.

[W18] D. Wan, *Subsolution theorem and the Dirichlet problem for the quaternionic Monge-Ampère equation*, Math. Z., **296**(3-4), 1673–1690, 2020.

[Y78] S. T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation, I*, Comm. Pure Appl. Math., **31**(3), 339–411, 1978.

[Z17] J. Zhu, *Dirichlet problem of quaternionic Monge–Ampère equations*, Israel J. Math. **214**(2), 597–619, 2017.