dr hab. Mariusz Skałba,
Wydział Matematyki
Uniwersytet Warszawski
e-mail: skalba@mimuw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Błażeja Żmii
Arithmetic properties of certain partition sequences

Recenzowana rozprawa doktorska napisana jest po angielsku i dotyczy liczby partycji na części z zadanego zbioru A. Partycją liczby naturalnej n nazywamy każde jej przedstawienie jako sumy pewnych elementów $a \in A$, przy czym elementy mogą się powtarzać, a ich kolejność jako składników sumy nie ma znaczenia. Jak powszechnie wiadomo ta ostatnia konwencja czyni zagadnienie trudnym i interesującym już dla $A = \mathbb{N}$. Naturalnym narzędziem przy badaniu liczby partycji $p_A(n)$ jest (zwykła) funkcja tworząca:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_A(n)\underline{q^n},$$

która jak łatwo zauważyć wynosi

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_A(n)\underline{q^n} = \prod_{a \in A} \frac{1}{1-q^a}. \tag{1}$$

Niestety w dysertacji pana Żmii brakuje podkreślonego czynnika q^n. Brakuje go konsekwentnie we wszystkich wyświetlonych wzorach paragrafu 1.2, również w ostatnim, który jak widać nie mógł powstać metodą „kopiuj–wklej". To wszystko dzieje się na stronach 8–9 rozdziału pierwszego. Aby dokończyć ten wątek przenieśmy się na strony 17–18. W podpisach rysunków 2.1 oraz 2.2 litera t powinna być (oczywiście) zastąpiona literą n w odpowiednich nierównościach.

Wytknąłem te drobne błędy typograficzne, aby uczulić autora na przyszłość: wiele z jego wyników ma bardzo techniczny charakter i chociażby z tego powodu zasługują one (te wyniki oraz Czytelnik) na staranniejszą edycję.

Poza klasycznym przypadkiem $A = \mathbb{N}$, który zaczął rozpatrywać już Euler (np. twierdzenie pentagonalne) ważny i badany przez wielu autorów jest przypadek:

$$A_2 = \{1, m, m^2, m^3, \ldots\},$$

gdzie $m \geq 2$ jest ustalone. Ostatnio rozpatruje się przypadek jeszcze ogólniejszy

$$A_3 = \{1, m_1, m_1m_2, m_1m_2m_3, \ldots\} \quad (m_j \geq 2)$$

i w badaniu tego przypadku pan Żmija ma swój istotny udział. I tak np. w rozdziale 3 podejmuje problem uogólnienia słynnej kongruencji Ramanujana:

$$p_{\mathbb{N}}(5n + 4) \equiv 0 \pmod 5 \tag{2}$$

na ten przypadek. Nie tylko obala hipotezy 3.1.1., 3.1.2 postawione przez poprzedników, ale dowodzi ciekawego (pozytywnego) twierdzenia 3.3.1, z którego wynikają między innymi odpowiednio okrojone wersje fałszywych hipotez.

Aby pogłębić badania ciągu liczb $p_A(n)$ warto w iloczynie nieskończonym po prawej stronie wzoru (1) zamienić ogólny czynnik $1/(1-q^a)$ na $1/(1-tq^a)$, gdzie t jest nową zmienną. Jeśli teraz napiszemy

$$\prod_{a\in A} \frac{1}{1 - tq^a} =: \sum_{n=0}^{\infty} p_A(n,t)q^n$$

to łatwo zauważyć, że $p_A(n,t)$ są wielomianami zmiennej t. I tak np. dla przypadku A_2 pan Żmija dowodzi następującego ciekawego rezultatu (wniosek 2.3.4):

dla dowolnego $m \geq 2$ *wszystkie pierwiastki zespolone* t *wielomianu* $p_{A_2}(n,t)$ *spełniają* $|t| < \sqrt[m]{4}$.

Natomiast dla przypadku ogólnego A_3 doktorant wyprowadza z własności ciągu wielomianów $p_{A_3}(n,t)$ (patrz ogólne twierdzenie 2.4.3) następujący piękny wniosek 2.4.5:

Niech $n = a_0 + a_1m_1 + a_2m_1m_2 + \ldots$ *będzie repreprezentacją* n *w bazie* A_3 *(pomińmy łatwe szczegóły). Wówczas:*

$$p_{A3}(n) \equiv \prod_{j=1}^{k}(a_j + 1) \pmod{\gcd(m_1, \ldots, m_k)}.$$

Jest to naturalne uogólnienie wzoru Ramanujana (2).

Wygodne narzędzie do badania liczby tzw. *partycji pokolorowanych* uzyskamy, jeśli w iloczynie nieskończonym po prawej stronie wzoru (1) zamienimy ogólny czynnik $1/(1-q^a)$ na $1/(1-q^a)^t$, gdzie t jest nową zmienną. Łatwo widzieć, że po „wymnożeniu" iloczynu nieskończonego współczynnik przy q^n znowu będzie wielomianem zmiennej t. Autor poświęca cały rozdział 5 badaniu odpowiedniego ciągu wielomianów i wysnuwa stąd wnioski dotyczące partycji pokolorowanych. Wreszcie w rozdziale 6 wieńczącym pracę pan Żmija proponuje autorski oryginalny sposób wytwarzania partycji przez zadany diagram. Być może potencjał tej teorii jest istotnie większy niż li tylko możliwość jednolitego traktowania wszystkich wcześniejszych przypadków szczególnych różnych partycji (różne zbiory A). Nie mnie to sądzić, ale uważam, że umiejętności i kompetencje doktoranta w teorii partycji dają na to szansę.

Wiele wyników tej dysertacji ukazało się już w najlepszych czasopismach specjalistycznych oraz w bardzo dobrych ogólnomatematycznych. Nie mam najmniejszych wątpliwości, że ta rozprawa doktorska spełnia wszystkie ustawowe wymogi jakości takowych prac oraz nie uchybia najwyższym standardom merytorycznym zwyczajowo stosowanym na najlepszych wydziałach matematyki. Dlatego z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie pana magistra Błażeja Żmii do dalszych etapów postępowania doktorskiego.