dr hab. Tomasz Jędrzejak
Uniwersytet Szczeciński
Instytut Matematyki
ul. Wielkopolska 15
70-451 Szczecin

Szczecin, 27 sierpnia 2021 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Błażeja Żmii
Arithmetic properties of certain partition sequences

Recenzowana rozprawa została napisana pod kierunkiem dra hab. prof UJ Macieja Ulasa. Jej głównym tematem są partycje liczb naturalnych. Mówiąc z grubsza partycja liczby n to wyrażenie postaci $n = n_1 + \ldots + n_k$, gdzie n_i to też liczby naturalne (dodatnie). Historia teorii partycji sięga co najmniej czasów Leonarda Eulera. Właśnie Euler udowodnił między innymi, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, liczba partycji n tylko z nieparzystymi składnikami jest równa liczbie partycji n z różnymi składnikami (tzn. żadne dwa nie są równe). Kolejnym milowym krokiem w tej teorii były wyniki Ramanujana, Hardy'ego i innych na początku XX wieku; w szczególności tzw. tożsamości Rogersa-Ramanujana (nie będę przytaczał tu wzorów). Również Ramanujan otrzymał pierwsze wyniki dotyczące arytmetyki ciągów partycji, np., że liczba wszystkich partycji liczby $5n + 4$ jest podzielna przez 5, a liczba partycji $7n + 5$ dzieli się przez 7.

Kolejne wyniki dotyczyły specjalnych rodzajów partycji. Otóż zamiast rozpatrywać dowolne $n_i \in \mathbb{N}$ można założyć, że składniki należą do ustalonego podzbioru zbioru liczb naturalnych i dodatkowo spelniają jeszcze pewne relacje między sobą. Np., gdy wszystkie n_i są potęgami ustalonej liczby m, mówimy o partycjach m-arnych (w szczególności binarnych dla $m = 2$). Właśnie dla partycji m-arnych Andrews, Gupta, Rødseth, Sellers i inni otrzymali kongruencje, które można uważać za analogony wspomnianych rezultatów Ramanujana. Te wyniki zostały uogólnione przez Gouldena i Shuldinera dla tzw. m-arnych partycji z kolorami (ang. *colored m-ary partitions*). W te nurty współczesnych prac wpisują się także wyniki mgra Żmii przedstawione w recenzowanej rozprawie.

Rozprawa *Arithmetic properties of certain partition sequences* liczy 91 stron i składa się z sześciu rozdziałów. Bibliografia zawiera 47 pozycji, w tym cztery artykuły autorstwa (lub współautorstwa wraz z promotorem) mgra Żmii. Napisana jest (jak wskazuje tytuł) w języku angielskim. W pierwszym rozdziale zamieszczono podstawowe oznaczenia, definicje oraz własności klasycznych partycji i ciągów automatycznych.

W drugim rozdziale doktorant wprowadza pojęcie wielomianów partycji M-arnych $p_M(n,t)$, gdzie $M = (1, m_1, m_2, \ldots)$ jest ustalonym ciągiem liczb naturalnych przy czym $m_i \geq 2$ dla $i > 0$. Na wielomiany te można patrzeć jak na uogólnienie partycji m-arnych. Niech $p_m(n,t) := p_M(n,t)$ dla $M = (1, m, m, \ldots)$. Autor bada pierwiastki $p_m(n,t)$ względem zmiennej t i otrzymuje między innymi pełny opis ich wymiernych pierwiastków. Poza tym pokazuje, że wszystkie ich zespolone pierwiastki (dla $m \geq 2$) leżą w kole o środku w 0 i promieniu 2. Następnie bada zachowanie wielomianów $p_M(n,t)$ modulo inne wielomiany. Otrzymane wyniki są uogólnieniem wzmiankowanych wyżej kongruencji dotyczących partycji m-arnych (gdy przejdziemy w granicy z t do 1). Końcówka rozdziału drugiego poświęcona jest badaniom współczynników wielomianów partycji M-arnych.

Rozdział trzeci dotyczy kongruencji wyższych rzędów dla partycji M-arnych. Ta część badań mgra Żmii była zainspirowana hipotezami Folsoma (i innych), które uogólniały wspomniane kongruencje udowodnione przez Rødsetha i Sellersa. Notabene hipotezy Folsoma w pełnej ogólności okazały się fałszywe, co doktorant pokazał przez kontrprzykład. Ponadto w miejsce tych hipotez udowodnił twierdzenie ze słabszą tezą, ale nadal będące znacznym ulepszeniem wyników Rødsetha i Sellersa.

Rozdział czwarty jest poświęcony pewnym rodzinom p-arnych partycji z kolorami (tzn. każdej składowej n_i przypisujemy pewien kolor), gdzie p jest liczbą pierwszą. Autor stosując nowe podejście rozszerza wyniki oraz upraszcza dowody z dwóch swoich publikacji z promotorem. Dotyczą one p-adycznych waluacji liczby p-arnych partycji z kolorami spełniających dodatkowe warunki. To nowe podejście polega na użyciu ogólnej rodziny szeregów potęgowych zawierającej wiele typowych funkcji generujących dla ciągów partycji.

W rozdziale piątym mgr Żmija rozważa inną (niż w rodziale drugim) klasę wielomianów związaną z partycjami. Mianowicie, dla (prawie) dowolnej funkcji arytmetycznej f definiuje rekurencyjnie pewien ciąg wielomianów $\left(P_n^f(x)\right)_{n=0}^{\infty}$. W szczególności gdy $f = \sigma$ jest funkcją suma dzielników i $x \in \mathbb{N}$, to $P_n^f(x)$ jest równy liczbie partycji liczby n, których każdy składnik może być pokolorowany jednym z x kolorów. Ważnym otwartym problemem w teorii liczb jest wyznaczenie pierwiastków wielomianów $P_n^\sigma(x)$. Heim i Neuhauser badali w szczególności problem czy pierwiastek z jedynki może być pierwiastkiem $P_n^\sigma(x)$. Doktorant uogólnił ich wyniki na $P_n^f(x)$ i pokazał, że przy pewnych rozsądnych założeniach odpowiedź brzmi "nie". Ponadto znalazł ich zastosowanie dla ogólniejszych partycji z kolorami (tzw. *multicolored partictions*).

Rozdział szósty (ostatni i najdłuższy) dotyczy nowego podejścia do badania ciągów partycji opartego na tzw. diagramach. Mówiąc z grubsza diagram to skierowany graf z wierzchołkami ponumerowanymi liczbami naturalnymi. Każdy diagram w naturalny sposób generuje partycję. Okazuje się, że wiele znanych typów partycji pochodzi właśnie z takich konstrukcji. Duża część tego rozdziału poświęcona jest wprowadzaniu pojęć związanych z diagramami i konstrukcji samych diagramów oraz badaniu ich podstawowych własności jak np. ogólne równanie funkcyjne spełniane przez funkcję generującą ciągu partycji pochodzących od diagramów. Następnie te wyniki mgr Żmija stosuje do diagramów i partycji M-arnych (uogólniających, jak wspomniałem, partycje m-arne) i dowodzi ogólnego twierdzenia, które zawiera wszystkie wcześniej znane wyniki dotyczące charakteryzacji modulo m wielu typów ciągów partycji m-arnych, w szczególności rezultaty Andrewsa, Gouldena, Shuldinera i innych. Ponadto znajduje analogiczną charakteryzację dla "nadpartycji" m-arnych (ang. *m-ary overpartitions*), która jest całkiem nowym wynikiem (a przynajmniej nie pojawiła się w literaturze). Koniec rozdziału dotyczy zastosowań diagramów do znajdowania ogólnych tożsamości związanych z partycjami. Na uwagę zasługuje w szczególności nowa interpretacja drugiej tożsamości Rogersa-Ramanujana nieznana do tej pory mimo ponad stu lat intensywnych badań tych tożsamości.

Podsumowując, wyniki zawarte w rozprawie doktorskiej mgra Żmii są nowe, oryginalne i wartościowe. Ich dowody są dość trudne technicznie i pomysłowe, wymagają od autora sporych umiejętności w teorii partycji (i w ogóle w teorii liczb). Rezultaty są dobrze umotywowane oraz wpisują się we współczesną tematykę badań partycji. Rozprawa zredagowana jest na wysokim poziomie: podane definicje, twierdzenia, dowody itp są precyzyjne i kompletne, zilustrowane dodatkowo licznymi przykładami, kolejność rozdziałów i podrozdziałów jest przemyślana i sensowna itd. Ponadto praca zawiera wiele skomplikowanych rysunków, diagramów, co świadczy o biegłości technicznej autora w posługiwaniu się matematycznymi edytorami tekstu. Krótko mówiąc rozprawa spełnia wszelkie wymogi formalne, jest ładnie napisana i ja nie znalazłem w niej żadnych błędów (poza nielicznymi "literówkami").

Żartobliwie dodam, że jedyną wadą niniejszej rozprawy jest jej długość, bo zmusza recenzenta do cięższej pracy. Mam też ambiwalentny stosunek (ale to nie jest zarzut) do doktoratów pisanych w Polsce po angielsku (oczywiście wyłączając sytuację, gdy doktorant lub promotor jest obcokrajowcem). Z jednej strony rozumiem, że taka rozprawa może być czytana na całym świecie i ułatwić międzynarodową karierę doktorantowi (np. staże podoktorskie); na uznanie zasługuje też dobra znajomość języka obcego. Z drugiej strony trochę szkoda, gdyż rozprawa pisana w ojczystym języku wzbogacałaby polską terminologię matematyczną, a przy okazji świadczyłaby o umiejętności posługiwania się piękną polszczyzną.

Napiszę jeszcze kilka uwag odnośnie samego doktoranta. Gdy poinformowano mnie, że będę recenzentem w przewodzie doktorskim mgra Żmii (notabene jest to mój debiut) spodziewałem się, że dostanę "matematyczne" CV kandydata, spis publikacji, informacje o referatach na konferencjach itp. Ku mojemu zaskoczeniu nie otrzymałem nic z tych rzeczy, gdyż procedura tego nie przewiduje. Rozumiem, że kluczowa jest rozprawa i moim zadaniem jest jej ocena, ale uważam, że powyższe dane są także istotne do oceny doktoranta. W każdym razie zrobiłem własną kwerendę w matematycznych bazach danych MathSciNet i zbMATH Open. Według nich mgr Żmija opublikował aż sześć artykułów naukowych (wszystkie w latach 2018-2021). Dwa są samodzielne a trzy wspólne z promotorem. Wszystkie w dobrych i bardzo dobrych czasopismach naukowych jak np. Journal of Number Theory czy The Ramanujan Journal. W mojej opinii jak na dorobek przed doktoratem jest to rzadki i bardzo dobry wynik. Dodatkowo wiem z autopsji, że mgr Żmija aktywnie uczestniczy w konferencjach naukowych i seminariach, bo miałem okazję wysłuchać kilku jego referatów. Wszystko to wskazuje, że kandydat jest pracowitym i zdolnym młodym matematykiem.

Konkludując uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia warunki określone w ustawie z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (t.j. Dz. U. 2017, poz. 1789). Ponadto wnoszę o jej wyróżnienie.