prof. UAM dr hab. Michał Jasiczak,
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Poznań, 29 grudnia 2018

Recenzja rozprawy doktorskiej Pana mgra Ibrahima Djire zatytułowanej "Characterization of boundary pluripolar hulls"

Recenzowana rozprawa składa się z pięciu rozdziałów i liczy pięćdziesiąt dwie strony. Została ona napisana pod kierunkiem Pana prof. UJ dr hab. Łukasza Kosińskiego. Jej podstawę stanowią trzy artykuły, dwa wspólne wraz z J. Wiegerinckiem oraz jeden napisany samodzielnie. Jeden z nich został opublikowany w Comp. Var. and Elliptic Equ. [1], drugi przyjęty do druku w Math. Scand. [2]. Praca napisana samodzielnie nie została jeszcze przyjęta do druku. To dobry dorobek jak na doktoranta.

Pan mgr Ibrahim Djire zajmuje się w swojej rozprawie funkcjami plurisubharmonicznymi, definiowanymi za ich pomocą funkcjami ekstremalnymi oraz otoczkami. **To niewątpliwie głęboka, aktualna i ważna matematyka.** W swojej rozprawie wykorzystuje On bardzo głębokie wyniki E. A. Poletsky'ego zawarte w artykule *Holomorphic currents* opublikowanym w Indiana Univ. Math. J. (Indiana Math. Univ. J. 42 (1993), 85–144). **To niewątpliwie silna strona przedstawionej rozprawy.** Pan mgr Djire uzyskał wyniki, **które może nie są przełomowe, ale niewątpliwie ciekawe i z pewnością naturalne.**

Pierwsze dwa rozdziały maja charakter wprowadzający. Omawiane są tutaj podstawowe dla pracy pojęcia subharmoniczności, plurisubharmoniczności. Przedstawione są definicje i podstawowe własności obszarów pseudowypukłych, hiperwypukłych czy B-regularnych. Wreszcie omówione są zbiory polarne i pluripolarne. Ważne jest, że Autor zarysowuje także teorię funkcjonałów dyskowych pochodzącą od Poletsky'ego. Muszę przyznać, że czytałem tę część pracy z dużą przyjemnością. Autor ładnie omawia wiele fundamentalnych dla analizy zespolonej wyników. **Sprawia to, że Jego twierdzenia wydają się być naturalną częścią całej teorii.**

Rozdział trzeci poświęcony jest brzegowym zbiorom pluripolarnym i brzegowym otoczkom pluripolarnym. Chyba najważniejszy wynik tego rodziału mówi, że w klasie obszarów B-regularnych zachodzi $\hat{A} \cap \partial D = A$ dla zbiorów b-pluripolarnych. Innymi słowy, brzegowa otoczka pluripolarna jest trywialna na brzegu obszaru. Związane z tym wynikiem jest twierdzenie mówiące, że jeżeli $z \in \partial D \setminus A$ i istnieje silna bariera plurisubharmoniczna w z, to $z \notin \hat{A}$. Zdecydowanie takich właśnie wyników należało się spodziewać. W rozdziale trzecim badane są także zbiory zupełne b-pluripolarne. Uzyskane wyniki są, jak przyznaje Autor, modyfikacją wyników Zeriahiego [7]. Kolejny ważny element rozdziału trzeciego to opisanie brzegowej otoczki pluripolarnej przy pomocy funkcji $\Omega(z, A, D)$. Autor podaje między innymi inny dowód twierdzenia uzyskanego przez Edigariana-Sigurdssona [3] dotyczącego jednostajnej aproksymacji dysków analitycznych na okręgu. Uzyskana charakteryzacja punktów należących do otoczki mówi, że $z \in \hat{A} \cap D$, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla każdego zbioru otwartego $V \subset \partial D$ zawierającego A istnieje ciągły dysk analityczny f taki, że $f(0) = z$ oraz miara Lebesgue'a $\mathbb{T} \cap f^{-1}(V)$ jest większa od M. Obszar D jest B-regularny, zbiór A jest b-pluripolarny. **Podobnie jak poprzednie wyniki ten także jest ładny i zupełnie naturalny**. Należy podkreślić, że teoria Poletsky'ego nie jest łatwa. Podnosi to wartość uzyskanych wyników.

W rozdziale czwartym badane są relacje między różnymi relatywnymi funkcjami ekstremalnymi ω. Samo pojęcie funkcji ω pochodzi od Sadullaeva [5]. Autor modyfikuje argument Wikströma [6] i dowodzi, że równość różnych wariantów funkcji $\omega(\cdot, A, D_H)$, gdy A jest zwartym podzbiorem brzegu zbioru

$$D_H = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \bar{z}^T H z < 1\}.$$

Symbol H oznacza dodatnią macierz Hermitowską wymiaru $n \times n$. W rozdziale czwartym podane są także kontrprzykłady do pewnych wyników Gogusa, Perkinsa i Poletsky'ego [4].

W rozdziale piątym podana jest charakteryzacja zupełnych zbiorów pluripolarnych oraz cienkości w terminach dysków analitycznych. Ten ostatni wynik jest ładny i motywowany teorią Poletsky'ego.

Praca nie jest napisana źle, nie jest jednak napisana starannie, w każdym razie nie zawsze jest napisana starannie. To czasami utrudnia rozumienie. Dokładniejsze referencje zdecydowanie pomogłyby w jej czytaniu. Naprawdę nie wytarczy napisać cf. [71, 57, 25] (Proposition 3.3.5). Zadanie recenzenta polega także na sprawdzeniu poprawności sformułowania cytowanych wyników. Fakt, że wynik znajduje się w pewnej pracy, nierzadko długiej, lub książce nie wystarcza.

Najważniejsza jest jednak jakość matematyki Pana mgra Djirego. Niewątpliwie udowodnione twierdzenia są częścią bardzo ważnej i głębokiej matematyki. To ważne. Same jednak twierdzenia określiłbym raczej jako naturalne i takie, których

należało się spodziewać. Opanowanie tej teorii z pewnością nie jest łatwe. To także zaleta pracy. Podsumowując recenzowany doktorat oceniam jako dobry. Wnioskuję o dopuszczenie pana mgra Ibrahima Djirego do dalszych etapów postępowania doktorskiego.

Michał Jasiczak

Michał Jasiczak

Literatura

[1] I. K. Djire, J. Wiegerinck, Characterization of boundary pluripolar hulls, Comp. Var. Elliptic Equ. 61 (2016), no. 8, 1133–1144.

[2] I. Djire, J. Wiegerinck, On a question of Sadulaev concerning boundary relative extremal functions, przyjęta do druku w Math. Scand.

[3] A. Edigarian, R. Sigurdsson, Relative Extremal Function and characterization of pluripolar sets in complex manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 10, 5321–5331.

[4] N. G. Gogus, T. L. Perkins, E. A. Poletsky, Non compact version of Edwards theorem, Positivity 17 (2013), 459–473.

[5] A. Sadullaev, Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds, Uspekhi Mat. Nauk 36 (1981), no. 4, 53–105, tłumaczenie na język angielski Russian Math. Surveys 36 (1981), no. 4, 61–119.

[6] F. Wikström, Jensen measure and boundary values of plurisubharmonic functions, Ark. Mat. 39 (2001), 181–200.

[7] A. Zeriahi, Ensembles ppluripolaires exceptionnels pour la croissance partielle des fontions holomorphes, Ann. Polon. Math. 50 (1989), no. 1, 81-91.