Recenzja rozprawy doktorskiej zatytułowanej *Characterization of boundary pluripolar hulls* autorstwa mgra Ibrahima Djire

Profesor Maciej Klimek
Instytut Matematyki,
Uniwersytet w Uppsali,
Szwecja

1 Krótka charakteryzacja rozprawy

Z punktu widzenia podjętej problematyki naukowej, recenzowana dysertacja doktorska plasuje się w głównym nurcie badań współczesnej teorii pluripotencjału. Co za tym idzie, materiał pojęciowy dotyczy głównie własności funkcji plurisubharmonicznych, relatywnych funkcji ekstremalnych i ich związków z analitycznymi dyskami, jak też zbiorów plu-ripolarnych i ich obwiedni.

Materiał recenzowanej pracy jest podzielony na pięć rozdziałów. Rozdział 1 to kilku-stronicowy wstęp do całej rozprawy. Rozdział 2 przedstawia w skrócony sposób narzędzia teoretyczne i znane rezultaty niezbędne do opisu nowych wyników uzyskanych przez autora. Te ostatnie stanowią podstawową część pracy i są zaprezentowane w pozostałych trzech rozdziałach.

Pracę zamyka lista oznaczeń i bibliografia przedmiotu.

Uzyskane nowe rezultaty są wartościowe i przyczyniają się do postępu w rozwoju teorii pluripotencjału.

2 Opis uzyskanych rezultatów

Opis podzielony jest na trzy części odpowiadające rozdziałom 3,4 i 5.

2.1 Brzegowe obwiednie pluripolarne

Rozdział 3 jest głównie bazowany na pracy [19].

Dla niepustego podzbioru E brzegu obszaru D w $\mathbb{C}^n$ definiuje się brzegową relatywną funkcję ekstremalną $\omega(\cdot, E, D)$ w następujący sposób:

$$\omega(z, E, D) = \sup\{u(z) \,:\, u \in PSH^-(D),\ u^* \leq -1 \text{ on } E\}, \qquad z \in D,$$

gdzie gwiazdka oznacza regularyzację górnie półciągłą, a symbol PSH^- ujemne funkcje plurisubharmoniczne. O zbiorze E mówimy, że jest brzegowy pluripolarny (albo b-pluripolarny) jeżeli $u^* = -\infty$ on E dla pewnej funkcji $u \in PSH^-(D)$. Jeżeli na dodatek $u^* = -\infty$ tylko na zbiorze E, mówimy, że ten zbiór jest zupełny. Jeśli $E \subset \partial D$ jest b-pluripolarny, to b-pluripolarną obwiednią zbioru E nazywamy zbiór wszystkich punktów $z \in \overline{D}$, dla których $u^*(z) = -\infty$ dla każdej funkcji $u \in PSH^-(D)$ takiej, że $u^* = -\infty$ na zbiorze E.

W ramach dyskusji szeregu podstawowych własności brzegowych relatywnych funkcji ekstremalnych jest udowodnione, że zbiór E jest b-pluripolarny wtedy i tylko wtedy gdy $\omega^*(\cdot, E, D) \equiv 0$. W tym przypadku jest pokazane, że przecięcie obwiedni b-pluripolarnej zbioru E z obszarem D jest zbiorem pluripolarnym, a dokładniej jest zbiorem punktów, w których rozważana funkcja ekstremalna zbioru E jest ujemna. Następnie przedstawione są warunki, przy których zbiór b-pluripolarny jest zupełny. Ten rezultat jest adaptacją dla przypadku brzegowego idei Zeriahiego z pracy [88] dotyczącej konwencjonalnych zbiorów pluripolarnych.

W dalszej części rozdziału autor proponuje alternatywny dowód twierdzenia Edigariana i Sigurdssona [26] o jednostajnej aproksymacji dysków analitycznych na kole jednostkowym. Na końcu rozdziału autor dowodzi twierdzenia charakteryzującego b-pluripolarne obwiednie przy pomocy dysków analitycznych. Rezultat ten jest brzegowym odpowiednikiem wcześniejszego wyniku Levenberga i Poletskyego [57].

2.2 Alternatywne definicje brzegowych relatywnych funkcji ekstremalnych

Rozdział 4, bazowany na artykule [20], jest poświęcony zmodyfikowanym definicjom brzegowych relatywnych funkcji ekstremalnych w sytuacji kiedy obszar D ma brzeg klasy $\mathcal{C}^1$. Rozważane są trzy rodzaje modyfikacji. Po pierwsze, do definicji można dopuścić tylko funkcje z rodziny $PSH^-(D) \cap \mathcal{C}(\overline{D})$. Po drugie, zamiast górnie półciągłej regularyzacji można użyć górnych granic wzdłuż kierunków normalnych do brzegu obszaru. Po trzecie, dla obszarów silnie gwiazdzistych względem początku układu, można brać granice górne wzdłuż promieni emanujących z zera. Zasadniczym problemem — oryginalnie postawionym przez Sadullaeva w pracy [71] — jest znalezienie sytuacji, w których zachodzi równość pomiędzy regularyzacjami par tych funkcji. Autor przedstawia pozytywne rozwiązanie tego problemu dla różnych typów obszarów w $\mathbb{C}^n$. W końcowej części rozdziału jest pokazane na przykładach, że wersja twierdzenia Edwardsa postulowana w artykule [33] nie jest prawdziwa.

2.3 Charakteryzacja zbiorów zupełnych i zbiorów cienkich

Celem rozdziału 5, częściowo opartego na preprincie [18], są w zasadzie dwa twierdzenia. Pierwsze jest właściwie prostą acz użyteczną obserwacją, przedstawiającą charakteryzację zupełnego pluripolarnego podzbioru obszaru ograniczonego w terminach zbieżności ciągu relatywnych funkcji ekstremalnych odpowiadających malejącemu ciągowi otwartych otoczeń tego zbioru. W konsekwencji tej obserwacji autor dowodzi, że przecięcie ciągu zupełnych pluripolarnych podzbiorów obszaru ograniczonego jest również zupełne. Drugi rezultat dotyczy zbiorów cienkich (zwanych też zbiorami pluri-cienkimi). Poza zbiorami pluripolarnymi stanowią one inną ważną klasę "małych" zbiorów teorii pluripotencjału. Autor charakteryzuje zbiór, który nie jest cienki w ustalonym punkcie za pomocą dysków analitycznych o środku w tym punkcie, a bardziej dokładnie w terminach miary na okręgu jednostkowym śladu przecięcia takowego dysku z rozważanym zbiorem.

3 Lista najważniejszych mankamentów redakcyjnych

O ile z merytorycznego punktu widzenia recenzowana praca zasługuje na pozytywną ocenę, autor nie ustrzegł się przed szeregiem usterek. Fragmenty rozprawy, a przede wszystkim dwa pierwsze rozdziały, demonstrują brak staranności w przedstawianiu tematu. Przykładem tego jest błąd w definicji funkcji plurisubharmonicznych, a więc w pojęciu absolutnie centralnym dla teorii pluripotencjału! Co prawda bibliografia pokazuje akceptowalną znajomość literatury tematu, ale również nie jest wolna od problemów redakcyjnych. A oto moje główne zastrzeżenia.

Przy odniesieniu do wiersza w na stronie s, będę używał notacji s^w lub s_w, zależnie od tego czy wiersze liczone są od góry czy od dołu strony. W odniesieniu do fragmentu strony pomiędzy wierszami w i v, będą to odpowiednio symbole $s^{w...v}$ lub $s_{w...v}$. Bardziej istotne matematyczne usterki będą wyszczególnione **tłustym drukiem.**

- Szczególnie w pierwszych dwóch rozdziałach, widoczny jest brak ciągłości w matematycznej narracji. Być może jest to skutek uboczny problemów lingwistycznych.

- Używanie kilku średników w definicjach zbiorów jest nietypowe i raczej logicznie nieuzasadnione bo sugeruje, że oddzielone fragmenty są niejako samodzielne pod względem pojęciowym. Jest to szczególnie istotne przy braku kwantyfikatorów np. w definicji obwiedni pluripolarnej na stronie 2^8. Ten problem jest widoczny w wielu miejscach pracy.

- Na stronie 4_{11}, słowo *larger* powinno być zastąpione przez *not smaller* albo *greater than or equal to.*

- Twierdzenie 2.1.15 dotyczy klasycznego wzoru Poissona przedstawianego w licznych podręcznikach, a więc odnośnik do pracy [67] jest raczej niewłaściwy.

- **Definicja funkcji plurisubharmonicznej na stronie $6_{6...10}$ jest niepełna** bo np. według niej funkcja $u(z,w) = \ln z$ nie jest plurisubharmoniczna w $\mathbb{C}^2$. Fragment zdania *which are not identically $-\infty$ on any connected component of U* po wprowadzeniu symbolu $PSH(U)$ jest zbyteczny, ponieważ ten warunek pojawia się już na początku definicji.

- Na stronie 6_1 należy zastąpić U przez D.

- Na stronie $7_{8\ldots11}$ odnosi się wrażenie, że Przykład 2.1.22 wynika z poprzedzającego go rezultatu z [78] (który nota bene jest udowodniony w [78] przy założeniu ścisłej pseudowypukłości obszaru D). Lepiej byłoby zacytować Twierdzenie 25 w [78], które rzeczywiście implikuje Przykład 2.1.22.

- Na stronie $8^{15\ldots16}$ **brakuje założenia** o ograniczoności i ścisłej pseudowypukłości rozważanego obszaru (por. [81]). Również w Twierdzeniu 2.1.26 **brakuje założenia**, że D jest obszarem pseudowypukłym o brzegu klasy $\mathcal{C}^1$ (por. Twierdzenie 2.1 w [75]). W tym samym twierdzeniu, trzecia konkluzja wymaga aby funkcja u_f była zdefiniowana na brzegu obszaru, a nie tylko wewnątrz (Definicja 2.1.25).

- Definicja 2.2.3 jest powtórzona za artykułem [85] i tak jak w [85] brakuje w niej słowa *probabilistic*.

- Domyślna kwantyfikacja w Definicji 2.2.5 może być interpretowana na dwa sposoby.

- Definicja 2.3.1 jest potrzebna wcześniej.

- Na stronie 10^8, autor twierdzi, że problem Leviego był rozwiązany przez Norgueta. W rzeczywistości palma pierwszeństwa należy do Oki (1953). Norguet i Bremermann uzyskali niezależnie podobny wynik rok później (por. [78]).

- Na stronie 11^{12} autor pisze, że *Hyperconvex domains are studied in [5] by Blocki.* Warto tu byłoby wspomnieć wcześniejsze prace z lat 1975-1996 poświęcone tej tematyce.

- Drugi warunek w Propozycji 2.3.11 pokrywa się drugim warunkiem w Twierdzeniu 2.1.26. Byłby tu wskazany jakiś komentarz.

- Stwierdzenie *The zero set of a holomorphic function is pluripolar* jest nieścisłe.

- W Przykładzie 2.4.11 chodzi o $\mathbb{C}^2$ a nie $\mathbb{C}^n$. Właściwy odnośnik w literaturze powinien być nie do doktoratu Edlunda ale do artykułu w Annales Polonici Mathematici 84(1) (2004), 75–86.

- Na stronie 15^1 nazwisko cytowane nazwisko powinno być *Thorbjörnson.*

- Na strone $15^{7\cdots}$ fragment zdania *a few results of Poletsky* należy zmienić na *a few results of Levenberg and Poletsky.*

- W Twierdzeniu 2.5.5 powinna by użyta notacja wprowadzona na stronie 13.

- Przykłady 2.6.1 i 2.6.2 powinny mieć odnośniki do literatury.

- We wstępnym akapicie rozdziału 3, dobrze byłoby wspomnieć wyraźnie, że podrozdziały 3.1–3.4 pochodzą głównie z pracy [19] napisanej wspólnie z Janem Wiegerinckiem.

- W definicji 3.1.1 warunek, że $u \not\equiv -\infty$, jest zbędny w świetle definicji plurisubharmoniczności.

- Na stronie 21 są dwie literówki we wzorach (wiersze 12 i 19).

- Definicja 3.3.1 jest powtórzeniem początku Definicji 3.1.1.

- W Uwadze 3.4.5 warto wspomnieć, że wyrażenie *approximation property* odnosi się do własności opisanej w Twierdzeniu 2.3.12.

- Na stronie 29^7 odnośnik do opublikowanej pracy [26] jest bardziej stosowny bo pozycja [25] jest nieopublikowana.

- We wprowadzającym akapicie rozdziału 4, należy wyraźnie zaznaczyć, że materiał rozdziału pochodzi głównie z pracy [20], której współautorem jest Jan Wiegerinck.

- We wstępnym akapicie rozdziału 5 dobrze byłoby wspomnieć wyraźnie, że spora część pochodzi z pracy [18].

- **Definicja zbioru pluriregularnego na początku strony 41 jest w oczywisty sposób błędna.** (W jej świetle jeżeli $E = \{u = -\infty\}$ dla $u \in PSH^-(D)$, to zbiór E byłby pluriregularny w D co jest nonsensem.)

- Na stronie $43_{5...9}$ w przykładzie ilustrującym jak otrzymać zbiór cienki trzeba założyć, że $z_0 \neq z_j$ dla $j \geq 1$.

- Propozycja 5.2.4 ma odnośnik do pracy Sadullaeva [71] gdzie jest jednak udowodniona przy innych założeniach.

- **Propozycja 5.2.6 ma odnośnik do Problemu 11.3 w artykule [71], co jest mylące bo cytowany problem dotyczy regularyzacji relatywnych funkcji ekstremalnych. Na dodatek, przedstawiony dowód zawiera błąd. Mianowicie, skonstruowane tam zbiory V_j niekoniecznie tworzą niemalejącą rodzinę, a więc nie można użyć w odniesieniu do tych zbiorów Propozycji 5.2.5.**

- Bibliografia wymaga ujednolicenia — różne pozycje są przytoczone w różnej formie, a czasem nawet bez niezbędnych szczegółów (np. [27], [29], [45] czy [66]). Potrzebny też jest szereg poprawek. Zamiast niektórych nieopublikowanych pozycji powinny być cytowane opublikowane wersje relewantnych prac (np. [28]). W wypadku cytowanych preprintów z bazy arXiv ich tytuły powinny zgadzać się z obecnie dostępnymi plikami. Jest to specjalnie ważne w wypadku [18] i [20], które stanowią istotną część recenzowanej rozprawy.

4 Konkluzja

Nowe rezultaty naukowe uzyskane w recenzowanej pracy są wartościowe i nietrywialnie rozszerzają zrozumienie podstawowych obiektów zainteresowania teorii pluripotencjału. Z redakcyjnego punktu widzenia można zwrócić uwagę na wiele problemów, ale ich znakomita większość nie dotyczy samej matematyki. Reasumując, pomimo opisanych powyżej usterek, **uważam, że praca spełnia wszystkie ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim i rekomenduję dopuszczenie pana mgra Ibrahima Djire do dalszych etapów przewodu doktorskiego.**

Uppsala, 7 stycznia 2019 roku

Maciej Klimek