09-06-2018

Ibrahim Djire

Streszczenie rozprawy doktorskiej pt. „Charakteryzacja brzegowych otoczek pluripolarnych"

Rozprawa doktorska ma pięć rozdziałów, z czego dwa pierwsze mają charakter wstępu. Całość zamyka spis oznaczeń i literatury.

Aby streścić rozprawę wygodnie będzie wprowadzić dwa pojęcia. Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie obszarem ograniczonym, natomiast $K \subset D$ zbiorem zwartym. Poprzez $\mathcal{PSH}(D)^-$ oznaczamy tutaj rodzinę niedodatnich plurisubharmonicznych funkcji na D. W 1969 prof. Siciak wprowadził, klasyczną już dziś, funkcję ekstremalną $u_{K,D}$, nazywaną we współczesnej literaturze relatywną funkcją ekstremalną zbioru K w D. W 1981 roku Sadullaev rozważał brzegową wersję funkcji Siciaka daną w następujący sposób: dla zbioru $A \subset \partial D$ oraz $z \in D$ kładziemy

$$\omega(z, A, D) = \sup\{u(z), u \in \mathcal{PSH}(D)^-, u^*|_A \leqslant -1\}.$$

Przypomnijmy jeszcze jedno pojęcie, wprowadzone piepwszy raz przez Edigariana, mianowicie pojęcie pluripolarnego podzbioru topologicznego brzegu D. Podzbiór ∂D nazywamy *$b-$pluripolarnym* jeśli jest podzbiorem zbioru, na którym pewna funkcja plurisubharmoniczna w D i ciągła na $\overline{D}$ przyjmuje wartość $-\infty$.

Rozdział trzeci niniejszej rozprawy doktorskiej rozpoczyna się od przedstawienia najważniejszych własności funkcji ω, a następnie użyciu ich w badaniu zbiorów pluripolarnych i ich otoczek. Udowodniamy, w szczególności, że w przypadku obszarów B-regularnych brzegowa otoczka pluripolarna jest zawsze trywialna na brzegu obszaru. Przedstawiamy ponadto brzegową wersję twierdzenia Zeriahiego o zupełności zbiorów pluripolarnych. Rozdział kończy się przedstawieniem pewnych aproksymacyjnych dla odwzorowań holomorficznych. Przy ich użyciu charakteryzujemy brzegowe zbiory pluripolarne za pomocą dysków analitycznych.

Definicja funkcji ω została wprowadzona przez Sadullaeva na kilka sposobów. Sadullaev zadał przy tym pytanie, czy postawione przez niego definicje są równoważne. Wokół tego problemu oscyluje kolejny, czwarty rozdział pracy. Pokazujemy, że odpowiedź jest pozytywna w wielu klasach obszarów. Na przykład, przy pewnych założeniach o D zachodzi równość

$$\omega(z, A, D) = \sup\{u(z); u \in \mathcal{PSH}(D)^-; \limsup_{y \to \zeta, y \in n_\zeta} u(y) \leqslant -1 \text{ for } \zeta \in A\}$$

gdzie n_ζ jest wewnętrznym wektorem normalnym do ∂D w punkcie ζ. Rozdział kończy się wykorzystaniem funkcji Siciaka do pokazania, że niezwarta wersja twiedzenia Edwarda zamieszczona w pracy

Gogusa, Perkinsa i Poletsky'ego jest fałszywa (w szczególności nie zachodzi nawet dla zbiorów otwartych).

W piątym, ostatnim rozdziale pracy wykorzystujemy relatywną funkcję Siciaka do charakteryzacji zupełnych zbiorów pluripolarnych. Ponadto badamy związki między cienkością zbiorów i dyskami analitycznymi.

09-06-2018

Ibrahim Djire

Characterizations of Boundary Pluripolar Hulls

Let $D \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded domain and $K \subset D$ be compact. $\mathcal{PSH}(D)^-$ stands for the family of nonpositive plurisubharmonic functions in D. Several decades ago, Siciak introduced an extremal function $u_{K,D}$, known nowadays as the relative extremal function of K in D. In 1981 the boundary version of Siciak's extremal function was introduced by Sadullaev. For $A \subset \partial D$, $z \in D$ one defines

$$\omega(z, A, D) = \sup\{u(z), u \in \mathcal{PSH}(D)^-, u^*|_A \leq -1\}.$$

A set in ∂D is called by Edigarian *boundary pluripolar* or $b-$*pluripolar* if it is a subset of $-\infty$-locus of an upper semicontinuous function in $\overline{D}$ that is plurisubharmonic in D.

In this thesis we present in Chapter 3 some basic properties of ω and use it to study boundary pluripolar sets and hulls. For B-regular domains we prove that the boundary pluripolar hull is always trivial on the boundary of the domain. We present a "boundary version" of Zeriahi's theorem on the completeness of pluripolar sets. After giving some approximation theorems of holomorphic maps we characterize boundary pluripolar sets in terms of analytic disc. The contain of Chapter 3 is published in **Complex Variables and Elliptic Equations.**

In fact Sadullaev has defined several extremal functions and asked whether his definitions are equivalent?. In Chapter 4 we study Sadullaev's question. For various domains we give an affirmative answer to his question. For instance we show that if D is an ellipsoid then

$$\omega(z, A, D) = \sup\{u(z); u \in \mathcal{PSH}(D)^-; \limsup_{y \to \zeta, y \in n_\zeta} u(y) \leq -1 \text{ for } \zeta \in A\}$$

where n_ζ is the inward normal to ∂D at ζ. To finish the chapter we show by using Siciak's extremal function that the non-compact version of Edwards duality theorem stated by Gogus-Perkins-Poletsky does not hold in open sets. Chapter 4 is based on a paper accepted in **Mathematica Scandinavica.**

In Chapter 5 we use Siciak's relative extremal function to characterize complete pluripolar sets and to characterize the thinness of a set in terms of analytic discs. Chapter 5 is a preprint on **Axiv.org.**