dr hab. Mariusz Skałba,
Wydział Matematyki
Uniwersytet Warszawski
e-mail: skalba@mimuw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Piotra Miski *p-adic properties of combinatorial sequences and subsets of* $\mathbb{N}$

Recenzowana rozprawa doktorska została przedłożona jako kompilacja 4 opublikowanych prac. Do tych prac będę się odwoływał w dalszym ciągu za pomocą numerów 6,7,8,9, zgodnie z bibliografią załączoną przez doktoranta do *Streszczenia rozprawy po polsku.* Tylko praca 7 jest wyłącznego autorstwa pana Miski. W przypadku pozostałych prac każdorazowo oświadczenia złożone na piśmie przez współautorów dowodzą, że udział pana Miski był istotny. Przejdę teraz do omówienia wszystkich prac włączonych do rozprawy doktorskiej, ale nie po kolei. Zacznę od pracy 7 opublikowanej w Acta Arithmetica. Dotyczy ona podzielności przez potęgi ustalonej liczby pierwszej liczb Stirlinga drugiego rodzaju. Znaczenie tych liczb znacznie wykracza poza kombinatorykę – autor wspomina np. o ich znaczeniu w topologii algebraicznej i cytuje odpowiednie prace. Umotywowanie przedstawionych w pracy rezultatów jest więc oczywiste. Ponadto wydaje mi się, że wyniki te są dość ważkie i wieńczą wcześniejsze wyniki różnych autorów dotyczące własności p-adycznych ciągu liczb Stirlinga drugiego rodzaju. Na pochwałę zasługuje też jednolite podejście autora do omawianych wyników wcześniejszych i hipotez, które udowodnił w optymalnym stopniu ogólności. Podejście to bazuje na elementach analizy p-adycznej np. na pojęciu funkcji lokalnie analitycznej. Bazując na tym języku udaje się Panu Misce przedstawić naturalne, dobrze umotywowane i często stosunkowo proste dowody swoich rezultatów. Sformułowania rezultatów pana Miski są jednak dość techniczne i dlatego poprzestanę na przywołaniu drobnego błędu, który występuje w sformułowaniu obu hipotez: zamiast $S(k,n)$ powinno być $S(n,k)$. Podsumowując; praca 7 zamyka w elegancki sposób (chodzi mi o metody) badania prowadzone wcześniej przez wielu autorów i to zasługuje na uznanie.

Potężna praca 9 jest głębokim studium własności arytmetycznych ciągu liczb $H_d(n)$. Liczba $H_d(n)$ to z definicji liczba wszystkich permutacji zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, które są iloczynami rozłącznych cykli ustalonej długości $d \geq 2$. Badaniem tych liczb zajmowano się wcześniej, ale tylko w przypadku, gdy d jest liczbą pierwszą. Nie sposób tu omówić wszystkich wyników tej prawie 60 stronicowej pracy opublikowanej w Monatshefte fuer Mathematik. Ograniczę się tylko do ogólnego omówienia jej zawartości. I tak np. w paragrafie 3 zbadano okresowość ciągu reszt $H_d(n)$ mod c dla pewnych liczb $c > d$. Natomiast w paragrafie 4 zbadano waluacje p-adyczne ciągu liczb $H_p(n)$. Kolejny paragraf 5 wydaje mi się najciekawszy w całej pracy. Podjęto w nim badania waluacji p-adycznej liczb $H_d(n)$ dla przypadku $p > d$. W konstruktywny sposób autorzy rozprawiają się w nim z fałszywą hipotezą wcześniejszych autorów (Conjecture 5.1) tzn. nie tylko ją obalają, ale proponują i dowodzą swoich twierdzeń – ta część pracy jest technicznie zawiła, ale na pewno wartościowa.

Na koniec omówię pokrótce zawartość prac 6 i 8, których wyniki i sposoby ich uzyskania są bliższe gustowi matematycznemu recenzenta. Niech A będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{N}$ oraz niech

$$\mathcal{R}(A) = \{b/c : b, c \in A\}$$

oznacza zbiór wszystkich ilorazów. Ponieważ $\mathcal{R}(A) \subset \mathbb{Q}$ oraz ciało $\mathbb{Q}$ można uzupełnić względem różnych norm więc można pytać kiedy $\mathcal{R}(A)$ jest gęsty w rozważanym uzupełnieniu. I tak np. gdy rzeczone uzupełnienie jest ciałem $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych to jest to klasyczne zagadnienie i było ono badane przez wielu autorów. Natomiast gdy uzupełnienie jest ciałem liczb p-adycznych to badaniem tej sytuacji zajęto się dopiero w 21 wieku. I tak np. w pracy opublikowanej w Acta Arithmetica w 2017 Garcia i inni zadali następujące naturalne pytanie: *Czy istnieje podział zbioru* $\mathbb{N}$ *na dwa niepuste podzbiory* A, B *taki, że ani* $\mathcal{R}(A)$ *ani* $\mathcal{R}(B)$ *nie jest gęsty w żadnym ciele liczb* p*-adycznych?* W pracy 8 uzyskano następujące wyniki, które z nawiązką odpowiadają negatywnie na tak postawione pytanie.

- Niech $A_1, \ldots, A_k$ będzie podziałem $\mathbb{N}$. Wówczas dla każdej liczby pierwszej p z wyjątkiem co najwyżej $\lfloor \log_2 k \rfloor$ liczb pierwszych, przynajmniej jeden ze zbiorów $\mathcal{R}(A_j)$ jest gęsty w $\mathbb{Q}_p$.

- Dla wszystkich z wyjątkiem co najwyżej $k - 1$ liczb pierwszych p przynajmniej jeden ze zbiorów A_j jest gęsty w $\mathbb{Z}_p$.

Ponadto autorzy dowodzą, że każdorazowo te liczby wyjątkowych liczb pierwszych p są optymalne (podają wyraźne konstrukcje odpowiednich podziałów). Uważam, że pomimo niewielkiej głębi dwa powyższe wyniki są bardzo ciekawe i eleganckie.

W pracy 6 opublikowanej w Journal of Number Theory autorzy zajmują się również gęstością zbiorów $\mathcal{R}(A)$, ale tym razem $A = S_m^n$ jest zbiorem tych liczb naturalnych, które są sumami m, n-tych potęg liczb całkowitych nieujemnych. Dowodzą np., że $\mathcal{R}(S_m^3)$ jest gęsty w $\mathbb{Q}_p$ dla każdej liczby pierwszej p i dowolnego $m \geq 2$. Korygują przy okazji fałszywą tezę innych autorów, że dla $p = 3$ jest inaczej. Metody użyte w tej pracy znowu bazują na technikach analizy p-adycznej. Wydaje się, że mimo kompletności wyników zaprezentowanych w tej pracy nie zamyka ona tej interesującej problematyki – autorzy stawiają pytania (np. Question 1.14), które mogą być zaczynem podobnych badań.

Podsumowując swoją recenzję stwierdzam, że przedstawione przez pana mgr Piotra Miskę prace, opublikowane w bardzo dobrych i dobrych czasopismach, wystarczają z zapasem na pracę doktorską z matematyki. Dlatego wnoszę z pełnym przekonaniem o dopuszczenie doktoranta do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Warszawa, 20.08.2020r. M. Skałba