Wrocław, 11 sierpnia 2020 r.

dr hab. Marcin Bieńkowski
Instytut Informatyki
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

Recenzja rozprawy doktorskiej
„Geometric and weight constraints in Online Interval Coloring"
mgr. Patryka Mikosa

Rozprawa Patryka Mikosa poświęcona jest problemom kolorowania online grafów, dla których autor konstruuje nowe algorytmy i dolne ograniczenia, a następnie analizuje je w ujęciu analizy konkurencyjnej. W problemach kolorowania grafów online dany jest graf G, którego wierzchołki prezentowane są algorytmowi po kolei wraz z sąsiadującymi z nimi krawędziami. Dla danego wierzchołka algorytm online musi przypisać jeden z dostępnych kolorów, a przypisanego koloru nie można zmienić w przyszłości. Celem jest minimalizacja użytych kolorów. Łatwo zauważyć, że w takim ujęciu algorytm online nie ma szans wybrania optymalnego kolorowania. (W kontraście do „standardowej" algorytmiki trudność nie polega na ograniczonych zasobach obliczeniowych algorytmu, lecz wynika z nieznajomości całego grafu). W takim przypadku standardowo stosuje się tzw. analizę konkurencyjną (*competitive analysis*): mówimy, że algorytm jest γ-konkurencyjny, jeśli dla dowolnego wejścia liczba wykorzystanych przez niego kolorów jest nie większa niż γ razy liczba kolorów koniecznych do pokolorowania grafu (np. przez optymalny algorytm, który zna cały graf od samego początku).

W swojej rozprawie Patryk Mikos rozważa są grafy przedziałowe. Jest to naturalnym wyborem: sprawia, że możliwe staje się osiągnięcie algorytmów o stałej konkurencyjności, a dodatkowo modeluje naturalne problemy przydziału zadań do maszyn. O kolorach możemy wtedy myśleć jak o maszynach, a o wierzchołkach grafu przedziałowego — jak o zadaniach do wykonaniach w określonych przedziałach czasu. Każdy z wierzchołków musi zostać pokolorowany (tj. przypisany do jakiejś maszyny). Na każdej maszynie w danej chwili może być wykonywany tylko jedno zadanie.

Warto w tym miejscu wprowadzić rozróżnienie, które może istotnie wpływać na osiągalne przez algorytmy online współczynniki konkurencyjności. Mianowicie w trudniejszym wariancie graf przedziałowy jest podawany jako ciąg wierzchołków i krawędzi między nimi (*problem kolorowania grafu*). Natomiast w łatwiejszym wariancie wierzchołki podawane są jako przedziały czasowe (*problem kolorowania przedziałów*).

W pracy autor często rozważa uogólnienie problemu kolorowania do wariantu ważonego (*with bandwidths*). Oznacza to, że każdy wierzchołek grafu ma pewną wagę z przedziału $[0, 1]$ i jeśli popatrzymy na reprezentację grafu w postaci przedziałów czasowych, to w każdym momencie czasu sumaryczna waga przedziałów pokolorowanych jednym kolorem nie może

ℓ

być większa od 1. (W wariancie nieważonym każdy wierzchołek ma wagę równą 1). Dla typowego zastosowania jakim jest szeregowanie zadań oznacza to, że na jednej maszynie może być jednocześnie wykonywane wiele zadań, ale ich sumaryczna waga nie może przekraczać możliwości maszyny (nie może być większa od 1).

1. Osiągnięte wyniki

Rozprawa składa się dwóch rozdziałów wprowadzających (Introduction i Preliminaries), po których następuje techniczna część przedstawiająca osiągnięte przez Patryka Mikosa wyniki. Część wprowadzająca zawiera krótki opis niektórych poprzednich wyników, umiejscawiając rozprawę na tle aktualnego stanu wiedzy.

Część z wyników prezentowanych w rozprawie została również zawarta w dwóch publikacjach autora:

1. Patryk Mikos: A new lower bound for the on-line coloring of intervals with bandwidth. Theor. Comput. Sci. 708: 96-100 (2018)

2. Grzegorz Gutowski, Patryk Mikos: Lower Bounds for On-line Interval Coloring with Vector and Cardinality Constraints. SOFSEM 2017: 325-335

Warto jednak podkreślić, że większość wyników przedstawionych w rozprawie nie została (jeszcze?) opublikowana.

Kolorowanie ważonych przedziałów

W rozdziale pierwszym Patryk Mikos rozważa problem kolorowania ważonych przedziałów. Dla tego wariantu autor prezentuje nowe dolne ograniczenie 4,1626 na współczynnik konkurencyjności poprawiające dotychczasowo najlepszy wynik 3,4285 [Epstein i Levy, MFCS 2005]. W tym celu autor konstruuje dość naturalną strategię adwersarza o parametryzowalnym rozmiarze. Wynik jest osiągany dla wielkości wejścia zmierzającej do nieskończoności.

Wpływ reprezentacji grafu na osiąganą konkurencyjność

Rozdział drugi jest jednym z centralnych miejsc w pracy. Autor rozważa tutaj kolorowanie grafów przedziałowych (w wersji ważonej), które mają reprezentacje przedziałową składającą się wyłącznie z przedziałów jednostkowych. Główny nacisk położony jest tutaj na badanie zależności osiągalnej konkurencyjności od tego, w jaki sposób algorytm poznaje graf.

- Jako ciąg wierzchołków z krawędziami (*kolorowanie grafu*).
- Jako ciąg przedziałów *właściwych* (*proper*), tj. takich, że jeśli dwa przedziały są różne, to pierwszy nie jest zawarty w drugim (*kolorowanie przedziałów właściwych*).
- Jako ciąg przedziałów o jednostkowych długościach (*kolorowanie przedziałów jednostkowych*).

Warto zauważyć, że choć rozważane grafy mają reprezentację wykorzystującą przedziały jednostkowe, to w drugim z powyższych przypadków algorytmowi prezentowana jest być może inna reprezentacja, w której gwarantowane jest tylko to, że przedziały są właściwe.

4

Dotychczas najlepsze ograniczenie dolne na konkurencyjność dowolnego algorytmu online w wysokości 1,831 [Epstein, Levy, ICALP 2005] zostało poprawione przez autora do 2,1571 (przypadek kolorowania przedziałów jednostkowych), do 2,25 (przypadek kolorowania przedziałów właściwych) i do 2,657 (przypadek kolorowania grafów przedziałowych).

W tym celu stworzone zostały złożone strategie dla adwersarza oparte na prezentowaniu algorytmowi klik różnej wielkości, wykorzystujące eleganckie kombinatoryczne argumenty (korzystające m.in. z zasady szufladkowej) i wykorzystujące konstrukcję Epstein i Levy'ego jako podprocedurę. Ostatecznie wybory algorytmu kodowane są jako zmienne będące liczbami rzeczywistymi, zaś z konstrukcji wynikają pewne ograniczenia na kombinacje liniowe tych zmiennych. Pozwala to autorowi na przedstawienie współczynnika konkurencyjności jako wartości funkcji celu pewnego programu liniowego. Po jego analitycznym rozwiązaniu otrzymywane są podane wyżej dolne ograniczenia na konkurencyjność.

Warto wspomnieć, że dowody twierdzeń są złożone i ich skomplikowanie wynika przede wszystkim ze struktury argumentów, a nie jest tylko kreatywnym złożeniem wyników opublikowanych przez wcześniejszych badaczy.

Kolorowanie ograniczonych przedziałów (nieważonych)

Rozdział trzeci jest kolejnym centralnym punktem rozprawy. Autor bada w nim zależność między maksymalną długością przedziału σ (zakładamy, że minimalna długość to 1) a osiąganą konkurencyjnością dla problemu kolorowania przedziałów. Pokazuje, że dolne ograniczenie równe 3 dla tego problemu udowodnione przez Kiersteada i Trottera wymaga, żeby σ nie była ograniczona od góry i bada przypadki, w których σ musi być ustalona na samym początku.

Okazuje się, że jeśli σ jest odpowiednio duża (choć skończona), to można skonstruować dolne ograniczenie dla tego problemu, które jest dowolnie bliskie 2.5. Dla mniejszych wartości osiągane są również ciekawe wyniki: $\sigma > 2$ implikuje dolne ograniczenie 1.75, zaś $\sigma > 1$ dolne ograniczenie 1.667. Warto podkreślić, że konstrukcje dolnych ograniczeń nie są tutaj skończonymi obiektami: budowane są złożone strategie adwersarza, które są następnie rekurencyjnie wielokrotnie składane i osiągają podane wyżej wartości asymptotycznie.

Jako uzupełnienie powyższych wyników autor przedstawia również algorytm $(1+\sigma)$-konkurencyjny.

Kolorowanie ograniczonych przedziałów (ważonych)

W rozdziale czwartym autor do modelu kolorowania przedziałów o długościach z $[1, \sigma]$ dodaje wagi. Analiza parametryzowana jest tutaj przy pomocy zmiennych α i β, gdzie $\alpha \geq 0$ jest najmniejszą dopuszczalną wagą, zaś $\beta \leq 1$ największą. Dodatkowo autor skupia się na analizie bardzo naturalnego algorytmu FirstFit.

Jeśli nie wprowadzimy dodatkowych ograniczeń na wagi, to wiadomo, że algorytm FirstFit nie osiąga stałej konkurencyjności. Autor pokazuje jednak że konkurencyjność ta może być ograniczona jako funkcja σ, a mianowicie, że wynosi co najwyżej $\sigma + o(\sigma)$. W przypadku kiedy $\alpha > 0$ lub $\beta < 1$, autor rozszerza argument Pemmeraju i innych [TALG 2011], pokazując że konkurencyjność algorytmu FirstFit wynosi co najwyżej $16/\max\{\alpha, 1-\beta\}$. Następnie prezentuje asymptotycznie ciasne dolne ograniczenie w wysokości $\Omega(1/\max\{\alpha, 1-\beta\})$.

Rozdział uzupełnia nowe ograniczenie dolne na algorytm FirstFit, w którym wagi przedziałów są z zakresu $[0,\beta]$. Elementem składowym ograniczenia jest konstrukcja dolnego ograniczenia dla problemu Bin Packing podana przez Johnsona i innych [SICOMP 1974] wykorzystująca przedmioty o wagach z przedziału $[0,\beta]$. Zaprezentowane przez autora ograniczenie jest dwukrotnie wyższe niż to dla problemu Bin Packing.

Generowanie grafów przedziałowych

Rozprawę uzupełnia podany w ostatnim rozdziale algorytm generowania wszystkich grafów przedziałowych o n wierzchołkach. Autor podaje algorytm, który pomiędzy wypisaniami dwóch kolejnych grafów zużywa co najwyżej $O(n^3 \log n)$ czasu na obliczenia. Poprzednio najlepszy algorytm został skonstruowany przez Yamazakiego i innych [TCS 2019] i do wyliczenia kolejnego grafu wykorzystywał czas $O(n^4)$. Ta część rozprawy jest różna od poprzednich rozdziałów: dotyczy struktur danych dla efektywnych algorytmów. Autor w kreatywny sposób składa PQ-drzewa reprezentujące grafy przedziałowe, ciągowe reprezentacje kanonicznej postaci grafów i podaje efektywny algorytm, który sprawdza, czy uzyskany podczas ciągu przekształceń graf jest grafem przedziałowym. Algorytm został przez autora zaimplementowany i udostępniony.

2. Uwagi ogólne

Rozprawa zawiera kompleksową analizę wariantów problemu kolorowania online grafów przedziałowych. Jest to algorytmicznie ważny problem: wszystkie rozważane warianty mają umocowanie w istniejącej literaturze: zostały zaproponowane i były badane przez prominentnych naukowców zajmujących się teorią grafów, algorytmami online i szeregowaniem zadań. Rozważane problemy mają naturalną motywację ze świata rzeczywistego, a prezentowane wyniki istotnie poprawiają dotychczasowe. Z mankamentów: trochę brakuje w pracy komentarza na temat osiągalnych współczynników konkurencyjności w wariancie randomizowanym.

Rozprawa prezentuje interesujące i nietrywialne wyniki. Autor swobodnie łączy nietrywialne wyniki z różnych dziedzin algorytmiki i kombinatoryki. Prezentowane przez niego rozwiązania wymagały dużej pomysłowości, głębokiego zrozumienia problemu, kreatywnej modyfikacji poprzednich rozwiązań i pewnego doświadczenia w formułowaniu sensownych hipotez badawczych. Warto podkreślić, że w przypadku wielu prezentowanych dowodów ich konstrukcja jest daleka od oczywistości, a wyznaczenie ścieżki prowadzącej do ostatecznego rozwiązania wymagało dużej dozy inwencji i doświadczenia.

Część z wyników została opublikowana w przyzwoitych miejscach poświęconych informatyce teoretycznej (konferencja SOFSEM i czasopismo Theoretical Computer Science). Warto jednak byłoby — zwłaszcza, że wyniki są nietrywialne i dotyczą istotnych problemów optymalizacyjnych — pokusić się o opublikowanie ich na bardziej prestiżowych konferencjach algorytmicznych typu ESA, lub chociaż na workshopach dotyczących algorytmów online i szeregowania (typu WAOA czy MAPSP).

Uwagi redakcyjne

Część techniczna napisana jest bardzo sprawnie i czyta się ją z przyjemnością, pomimo tego, że jest ona bardzo nasycona matematyczną treścią. Lekturę ułatwiają intuicje, ilustracje i przykłady. Część wprowadzająca nie ma niestety takiej jakości. Brakuje tutaj solidnego wprowadzenia przedstawiającego w jednym miejscu dotychczasowy stan wiedzy. Takie informacje pojawiają się fragmentarycznie przy okazji poszczególnych rozdziałów, jednak ze względu na mnogość wyników czytelnikowi trudno jest zbudować pełny obraz sytuacji. W szczególności pomocna byłaby duża tabela przedstawiająca dotychczasowe wyniki i wyniki z rozprawy w podziale na rozważane modele.

3. Konkluzja

Pomimo uwag krytycznych, uważam że przedstawiona rozprawa zdecydowanie spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim, stanowiąc istotny wkład w dziedzinę kolorowania grafów online. **Wnoszę o dopuszczenie mgr. Patryka Mikosa do dalszych etapów przewodu doktorskiego**.

Bieńkowski

Marcin Bieńkowski