Dr hab. Łukasz Delong, prof. SGH
Instytut Ekonometrii, Kolegium Analiz Ekonomicznych
SGH Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

Warszawa, 02.09.2019

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Marcina Krzywdy pt. *"Kopule samopodobnych procesów dyfuzji Itô i ich zastosowania w matematyce finansowej"*

Opis rezultatów pracy

Autor rozważa dwuwymiarowy proces dyfuzji (X_t, Y_t), który jest rozwiązaniem układu stochastycznych równań różniczkowych postaci:

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{1}{\sqrt{t}}\mu\Big(\frac{X_t}{\sqrt{t}}\Big)dt + dW_t^1, \\ dY_t &= \frac{1}{\sqrt{t}}\nu\Big(\frac{Y_t}{\sqrt{t}}\Big)dt + A\Big(\frac{X_t}{\sqrt{t}}, \frac{Y_t}{\sqrt{t}}\Big)dW_t^1 + B\Big(\frac{X_t}{\sqrt{t}}, \frac{Y_t}{\sqrt{t}}\Big)dW_t^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Celem pracy jest scharakteryzowanie warunków koniecznych i dostatecznych, przy których dwuwymiarowy proces (X_t, Y_t) z losowym warunkiem początkowym (X_1, Y_1) jest 1/2-samopodobny. W szczególności, celem pracy jest scharakteryzowanie dopuszczalnych rozkładów brzegowych dla X_1 i Y_1 i dopuszczalnej kopuli C, która łączy zmienne X_1 i Y_1, przy których (X_t, Y_t) jest 1/2-samopodobny. Temat jest ważny zarówno w teorii procesów stochastycznych jak i w zastosowaniach w matematyce finansowej.

Rozprawa doktorska była inspirowana pracami Sempi [114] i Bosc [9]. Jednakże, zastosowane w rozprawie doktorskiej techniki są różne od technik w wymienionych artykułach i inny jest cel wyprowadzenia równania opisującego kopulę dla pary (X_t, Y_t).

Praca składa się z sześciu rozdziałów i dodatku. W Rozdziale 1 i 2 przypomniano czytelnikowi pewne pojęcia, odpowiednio, z teorii kopul i procesów stochastycznych.

Rozdział 3 zawiera główne wyniki pracy. Udowodniono, że istnieje 1/2-samopodobne rozwiązanie równiania (1). Pokazano jaką postać muszą mieć rozkłady brzegowe X_1 i Y_1 oraz kopula dla pary (X_1, Y_1) aby proces (X_t, Y_t) był 1/2-samopodobny. Zakładając różniczkowalność w słabym sensie kopuli, wyprowadzono eliptyczne rówanie różniczkowe, które kopula dla 1/2-samopodobnego dwuwymiarowego procesu (X_t, Y_t) musi spełniać.

W Rozdziale 4 przedstawione pewne własności kopuli 1/2-samopodobnego procesu (X_t, Y_t) oraz przykłady. Rozważane były dwa przykłady rozkładów brzegowych oraz dwa przykłady kopul. Tym samym pokazano, że zbiór kopuli dla 1/2-samopodobnego rozwiązania równania (1) nie jest pusty i zawiera nie tylko trywialne kopule Gaussa. Pokazano również, że nie każda kopula z dowolnym parametrem może być funkcją łączącą dla 1/2-samopodobnego rozwiązania (1).

Rozdział 5 zawiera ten sam rezultat co Rozdział 3, ale udowodniony przy silniejszym założeniu dotyczącym różniczkowalności funkcji kopula.

W Rozdziale 6 omówiono technikę zmiany miary. Pokazano jak dokonać zmiany miary aby procesy spełniające (1) były martyngałami. Podano przykład, że kopula procesu (X_t, Y_t) zmienia się w wyniki zmiany miary.

Moim zdaniem, rozprawa doktorska mgr. Marcina Krzywdy zawiera nowe, ciekawe i wartościowe wyniki. Rozprawa doktorska powstała w oparciu o dwa artykuły [67] i [68], napisane wspólnie z promotorem Prof. Jaworskim, z czego jeden został opublikowany w *Statistics and Probability Letter*, a drugi (jak przypuszczam) jest w recenzji.

Praca jest dobrze napisana. Są drobne pomyłki, które nie wpływają na końcowy wynik i nie przytaczam ich w swojej recenzji. Praca składa się ze 192 stron. Bibliografia liczy 125 pozycji, co pokazuje, że Pan Marcin Krzywda jest bardzo dobrze zaznajomiony z literaturą przedmiotu.

Uwagi i pytania

Uwagi, które nie wpływają na jakość pracy:

- Rozdział 1-2 mogły być krótsze, nie było potrzeby wprowadzania aż tylu pojęć z teorii kopuli i procesów stochastycznych,
- Skoro w Rozdziałach 1,3-5 autor rozważa wymiar $d = 2$, to w Rozdziale 2 też można było się ograniczyć do $d = 2$,
- Zamiast *support* można używać *nośnik*,
- Mówimy proces *adaptowany* do filtracji, a nie *adaptowalny* do filtracji,
- Zamiast *charakteryzacja zmiennej* użyłbym *charakterystyka zmiennej*,
- W tytule rozprawy doktorskiej mamy "i ich zastosowania w matematyce finansowej", jednak zastosowań jest bardzo mało w pracy, wręcz nie ma ich w pracy,
- Stwierdzenie o istnieniu silnego rozwiązania dla układu (1) gubi się w rozprawie, a jest to ważne stwierdzenie,
- W Rozdziale 3.4 brakuje założenia: $A^2(x, y) + B^2(x, y) = 1$,
- W Rozdziale 3.4.1 warto było dodać odpowiednik Wniosku 3.3.9, który dopiero pojawia się jako Lemat 5.4.5. Sam Lemat 5.4.5 można było udowodnić dla $X_1, Y_1 \in L^p$,
- W Rozdziale 3.5 warto było dodać twierdzenie mowiące o zbieżności kopuli do kopuli 1/2-samopodobnego rozwiązania (1), analogiczne jak dla rozkładów brzegowych (Wniosek 3.3.15 i 3.4.4). Taki rezultat podany jest w Lemacie 6.3.3 w szczególnym przypadku. Czy taki rezultat jest prawdziwy w ogólnym przypadku?
- W Rozdziale 5 brakuje założenia, że μ, ν są ograniczone,
- Stałe K w Lemacie 5.4.4 zależą od czasu t, ale to nie ma wpływu na kolejne dowody,

- Nie nawiązywałbym do modelu finansowego w Rozdziale 6. Nawiązanie jest bardzo luźne i nie wpływa na wyniki pracy. Raczej opisałbym ogólnie zamianę miary i jej konsekwencje,
- W Rozdziale 6.2 możemy korzystać z A1 i A2 zamiast B1 i B2,
- Można było opisać zmianę miary dla ruchu Browna wraz ze zmianą rozkładu dla warunku początkowego (X_1, Y_1) tak aby w nowej mierze (X_t, Y_t) był 1/2-samopodobny,
- Czasami zamiast φ pojawia się ϕ,
- Brakuje oświadczenia o udziale promotora w przygotowanych artykułach.

Pytania:

- Spełnione są A1 i A2. Jest dla mnie jasne, że dla zadanej i dowolnej kopuli C nie zawsze znajdziemy współczynnik A taki, aby para (X_t, Y_t) miała kopulę C i (X_t, Y_t) był 1/2-samopodobny. Jednocześnie, jeżeli istnieje taki wsp. A, to jest on jednoznacznie określony. Jest dla mnie także jasne, że dla zadanego i dowolnego wsp. A (spełniającego A2) zawsze znajdę kopulę C tak, aby para (X_t, Y_t) miała kopulę C i (X_t, Y_t) był 1/2-samopodobny. Jednakże nie jest dla mnie jasne, czy dla zadanego wsp. A kopula C jest jedyna, tzn. czy równanie (3.8) może posiadać dwa rozwiązania będące funkcjami kopula? Równanie (3.8) nie ma zadanego warunku początkowego (kopula C, której szukalibyśmy, determinuje również rozkład początkowy dla (X_1, Y_1)). Z Propozycji 4.1.1 wynika, że jeżeli wsp. A jest stały to C i C_3 są kopulami spełniającymi (3.8). Z Propozycji 4.1.4 jednak wynika, że $C = C_3$,
- Czy Propozycję 4.1.4 można udowodnić przy założeniu słabej różniczkowalności kopuli, co jest głównym założeniem w Rozdziale 3, dopiero osłabianym w Rozdziale 5?
- Prosiłbym o podanie przykładu kopuli, która jest słabo różniczkowalna ale nie jest różniczkowalna w sposób ciągły, tzn. spełnia Twierdzenie 3.1.2 ale nie spełnia Twierdzenia 5.4.1,
- Prosiłbym o rozważenie dryfu z Przykładu 2 i kopuli FGM. Czy mogę mieć taki model i układ (1) będzie miał rozwiązanie 1/2-samopodobne? Jeżeli tak, to jakie maksymalne wartości wsp. Spearmana dla pary (X_t, Y_t) mogę osiągnąć? Wystarczy analiza numeryczna, bez pokazywania, że wsp. A jest lipschitzowski. Z Rysunku 4.5 wynika, że im więcej masy prawdopodobieństwa umieścimy w ogonach rozkładów brzegowych X_1 i Y_1, tzn. im większe c_μ, c_ν, tym mniejszą zależnośc między X_t i Y_t możemy modelować. Czy też tak będzie dla kopuli FGM i dryfu z Przykładu 2? Czy to jest może jakaś ogólna własność w skonstruowanym modelu dla (X_t, Y_t)?
- W Rozdziale 6.3, czy mogę mieć niedeterministyczne współczynniki w (1) i przy zmianie miary dostać taką samą kopulę, ale z innym parametrem, dla pary (X_t, Y_t) dla $t \to \infty$?

- Brzegowe procesy X_t i Y_t nie mają przyrostów stacjonarnych, ale $Var[X_t] = tVar[X_1]$. Co można powiedzieć o korelacji przyrostów?

- Wydaje się, że brzegowe procesy dla 1/2-samopodobnego procesu (X_t, Y_t) muszą mieć rozkłady o ogonach zbiegających do zera jak ogony gaussowskie. Czy możemy mieć rozkład brzegowy dla (X_t, Y_t), którego ogon będzie wolniej zbiegał do zera niż ogon rozkładu normalnego, np. rozkład o ogonie jak w rozkładzie Normal Inverse Gaussian czy Variance Gamma?

- Które z założeń dla układu (1) powoduje, że nie możemy mieć kopuli o asymptotycznej zależności w ogonie dla 1/2-samopodobnej pary (X_t, Y_t)?

- Poza dwoma kopulami rozważanymi w pracy, czy znane są inne kopule, które mogę rozważać w modelu (1)? Czy znane są inne kopule, których nie mogę rozważać (poza kopulami z asymptotyczną zależnością w ogonie)?

- W matematyce finansowej czasami uważa się, że logarytmy cen akcji $(\log S_t^1, \log S_t^2) = (X_t^1, X_t^2)$ powinny być opisane, w mierze rzeczywistej, procesami (X_t^1, X_t^2) takimi, że brzegowe procesy mają rozkłady grubsze niż rozkład normalny, posiadają stacjonarne i skorelowane przyrosty o długiej pamięci (*long range dependence*), natomiast para (X_t, Y_t) powinna cechować się asymptotyczną zależnością w ogonie. Żadna z tych własności nie jest spełniona dla rozwiązania układu (1). Czy można, potencjalnie, zmodyfikować któreś z założeń dokonanych w pracy lub postać układu (1) i otrzymać procesy o wymienionych własnościach?

- Jeżeli przejdziemy do miary martyngałowej, to wtedy brzegowe rozkłady (X_t, Y_t) są ruchami Browna i możemy kontrolować tylko kopule C i wsp. A. Jaka jest korzyść z wykorzystania kopuli FGM zamiast Guassa w wycenie opcji?

Chciałbym wyraźnie podkreślić, że nie oczekuję, że Doktorant udowodni nowe twierdzenia, przygotuje nowe przykłady i przeprowadzi zaawansowane obliczenia numeryczne w celu odpowiedzi na powyższe pytania. Moje pytania należy potraktować jako wstęp do dyskusji na obronie.

Konkluzja

Pan Marcin Krzywda w swoje rozprawie doktorskiej wykorzystuje techniki z teorii kopuli, stochastycznych równań różniczkowych i eliptycznych równań różniczkowych. Zastosowanie różnorodnych technik świadczy o szerokiej wiedzy autora. W pracy rozwiązany został nietrywialny problem matematyczny i przedstawione wyniki charakteryzują rozwiązania 1/2-samopodobne dla układu (1) i ich kopule. Cel rozprawy został osiągnięty. Przedstawione w pracy dowody wymagały pokonania szeregu trudnych problemów technicznych z czym autor poradził sobie bardzo dobrze. Pracę przeczytałem z przyjemnością i bardzo dużym zainteresowaniem.

Uważam, że przedstawiona do oceny praca mgr. Marcina Krzywdy spełnia wymogi artykułu 13 Ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym (Dz.U. 2003 Nr 65 poz. 595 z poźniejszymi zmianami). Zatem wnoszę o jej przyjęcie jako rozprawy doktorskiej i o dopuszczenie do publicznej obrony.

Ł. Delong