Gdańsk, 12 lutego 2020 r.

Tomasz Szarek
WFTiMS Politechniki Gdańskiej
oraz IM PAN oddział w Sopocie

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr Anny Szczepanek pt. „Quantum Dynamical Entropy of Unitary Operators in Finite–Dimensional State Spaces"

Chciałbym rozpocząć recenzję tej niezwykłej rozprawy doktorskiej w dość nietypowy sposób, to znaczy od konkluzji: *Rozprawa doktorska mgr Szczepanek to dysertacja wybitna, najlepsza jaką kiedykolwiek czytałem. Jest doskonała pod każdym względem. Stanowi dla Autorki powód do dumy i oczywiście zasługuje na wyróżnienie. W moim odczuciu winna być zgłoszona do wszelkich możliwych nagród przewidzianych dla młodych naukowców za ich osiągnięcia uzyskane w rozprawie doktorskiej.*

W swojej pracy doktorskiej Pani Anna Szczepanek zajmuje się entropią dynamiczną pewnych układów kwantowych. Rozprawa stanowi zwartą i obszerną, bo liczącą prawie 200 stron, dysertację. Została napisana po angielsku i na ile pozwalają mi to ocenić moje dość skromne kompetencje filologiczne, jej strona językowa jest bez zarzutu.

Rozprawa składa się z dwóch rozdziałów wstępnych, czterech rozdziałów właściwych i pokaźnej bibliografii. Bardzo pomocne w lekturze dysertacji są indeks i lista użytych symboli. O ich użyteczności w czasie mojej skrupulatnej lektury mogłem się niejednokrotnie przekonać.

Tematyka pracy leży na pograniczu matematyki i fizyki, a mówiąc precyzyjniej, na przecięciu dwóch dziedzin: teorii układów dynamicznych i informatyki kwantowej. Napisany z dużym znawstwem rozdział wprowadzający podaje w sposób niezwykle przystępny fizyczne motywacje dla podejmowanej w rozprawie analizy naukowej. Podstawowymi obiektami badań są tak zwane pomiary rzutowe (PVM), a więc działania matematyczne odpowiadające mierzeniu w mechanice kwantowej. Autorka bada układy kwantowe, które ewoluuaj między kolejnymi pomiarami, sama zaś zmiana opisywana jest przez odpowiednie operatory unitarne.

Spektakularne wyniki przynosi już rozdział wstępny. Mam tu na myśli twierdzenie A.5, które podaje piękny wzór na sumę norm odpowiednich iteracji złożenia macierzy unitarnej i rzutowania w przestrzeni $\mathbb{C}^d$. Jego dowód, choć elementarny, jest dalece nietrywialny. W moim przekonaniu samo twierdzenie stanie się w przyszłości wynikiem podręcznikowym.

Podstawowym narzędziem, które służy do opisu ewolucji stanów kwantowych są tak zwane *iterowane układy funkcyjne.* Układy funkcyjne, a więc pary złożone z rodziny odwzorowań pewnej przestrzeni metrycznej w siebie oraz wektora probabilistycznego zadającego częstotliwość wyboru odpowiedniej transformacji w procesie losowych iteracji, stanowią także jedno z podstawowych narzędzi w stochastycznej teorii układów dynamicznych i mają szerokie zastosowania przy badaniu zbiorów fraktalnych. Na ogół jednak przyjmuje się, że odpowiednie wektory probabilistyczne są stałe (niezależne od położenia) lub w najgorszym wypadku od położenia zależą w sposób ciągły. Przy takich założeniach udaje się udowodnić pewne twierdzenia dotyczące statystycznego zachowania trajektorii.

Sytuacja przy badaniu stanów kwantowych jest znacznie bardziej skomplikowana. Układy funkcyjne, które służą do opisu ewolucji tych stanów złożone są z odwzorowań, które są określone jedynie na pewnych podprzestrzeniach zadanej przestrzeni kwantowej – są to tak zwane *częściowe iterowane układy funkcyjne,* ang. *partial iterated function systems* . Równoważnie można przyjąć, że transformacje są zdefiniowane wszędzie, jednak prawdopodobieństwo ich wyboru jest niezerowe tylko na pewnej podprzestrzeni. Zabieg ten powoduje nieciągłość wektora prawdopodobieństw i mocno komplikuje całe rozważania. Nade wszystko rzadko mamy wówczas do czynienia z układami funkcyjnymi, które mają jeden stan stacjonarny, a więc są ergodyczne. Istnienie podprzestrzeni niezmienniczych implikuje wielość miar ergodycznych. W szczególności, w twierdzeniu 1.41, Autorka podaje warunki konieczne i wystarczające do tego, żeby stan maksymalnie zmieszany nie był stanem ergodycznym. W rozdziale pierwszym Autorka wprowadza także podstawowe dla całej rozprawy pojęcie entropii dynamicznej.

W drugim rozdziale gruntownie zbadane zostały układy kwantowe określone na przestrzeni stanów $\mathcal{S}(\mathbb{C}^3)$, z pomiarami składającymi się z dwóch rzutowań o rzędach jeden i dwa. Jest to stosunkowo prosty układ kwantowy, ale już jego analiza prowadzi do bardzo zaawansowanych i złożonych rachunkowo rozważań. Autorka, badając zachowanie łańcuchów Markowa odpowiadających właściwym częściowym iterowanym systemom funkcyjnym, wyróżniła różne klasy układów i bardzo szczegółowo je zbadała. Podstawą do zaliczenia do odpowiedniej rodziny były numeryczne wielkości wartości własnych odpowiedniego operatora unitarnego (zob. twierdzenie 2.21). Dla mnie osobiście najbardziej interesujące w tej części rozprawy wydają się wyniki dotyczące zachowania układów kwantowych w zależności od wartości $\omega = \langle z, Uz \rangle$, gdzie U oznacza odpowiedni operator unitarny, natomiast z jest jednostkowym wektorem odpowiadającym rzutowaniu jednowymiarowemu. Uzyskanie tych rezultatów wymagało od Autorki rozległej wiedzy z odległych obszarów matematyki, np. z teorii zbiorów semi-algebraicznych.

Jednak głównym celem tej części rozprawy jest podanie efektywnego wzoru na entropię dynamiczną i entropię nadwyżkową w zależności od tego, do jakiej klasy należy badany układ kwantowy (zob. paragraf 2.4).

Na końcu rozdziału drugiego Autorka porównała swoje wyniki z rezultatami osiągniętym przez J.P. Crutchfielda i K. Wiesnera (*Intrinsic quantum computation*, Physics Letters A 372, (2008), ss. 375-380) pokazując, że w wielu przypadkach jej rozważania prowadziły do dużo lepszych efektów. Ten fragment rozprawy dobitnie okazał, że badania mgr Szczepanek nie są oderwane od głównego nurtu i dotykają problemów, którymi żywo interesują się matematycy i fizycy w wielu ośrodkach na całym świecie.

W rozdziale trzecim została zdefiniowana *entropia dynamiczna operatora unitarnego U przy ustalonym pomiarze* Π. W serii przykładów mgr Szczepanek policzyła tę entropię dla różnych układów kwantowych. Bardzo podoba mi się przykład 3.7, w którym Autorka zidentyfikowała operator unitarny maksymalizujący entropię dynamiczną względem operatora. Z kolei w przykładzie 3.8 imponujące rachunki doprowadziły do ustalenia wartości entropii dynamicznej odpowiednich rotacji przy pomiarach Blocha. Godna podziwu sprawność rachunkowa Autorki stanowiła dla mnie nie lada wyzwanie; przeliczenie wszystkich przykładów zajęło mi sporo czasu. Trochę żałowałem, że mgr Szczepanek w dość oszczędny sposób raczyła czytelnika szczegółami pozwalającymi w pełni zrozumieć jej arytmetyczne dokonania.

Ciekawym terminem pojawiającym się w rozdziale czwartym jest pojęcie *chaotyczności operatora*. Wedle definicji chaotycznymi są te operatory, które maksymalizują kwantową entropię dynamiczną (niezależną od pomiaru). Jest to dość intuicyjna koncepcja zgodna z potocznym rozumieniem entropii jako podstawowej miary uporządkowania systemu fizycznego. Punktem wyjścia do dalszych rozważań jest propozycja 4.5 podająca zestaw warunków równoważnych chaotyczności operatora unitarnego U. Wnioskiem płynącym z tej propozycji jest prosty warunek konieczny dla chaotyczności operatora unitarnego: Operator U na $\mathbb{C}^d$ jest chaotyczny, jeśli wartość absolutna jego śladu jest nie większa niż wymiar d. W przypadku $\mathbb{C}^2$, inaczej niż w wymiarach większych, powyższy warunek jest także wystarczającą przesłanką dla chaotyczności operatora unitarnego.

Kwantową entropię dynamiczną niezależną od pomiaru można definiować na dwa różne sposoby. Pierwszy z nich to wzięcie supremum entropii dynamicznych po zbiorze pomiarów rzutowych (PVM), drugi z kolei supremum entropii definiuje na szerszej klasie tak zwanych *pomiarów uogólnionych* (POVM). Według mnie najważniejsze twierdzenie pracy, a z pewnością najtrudniejsze, przynosi kończący rozprawę podrozdział 4.4. Po niezwykle żmudnych i pomysłowych rozważaniach Autorka udowodniła, że w wymiarze dwa wskazane powyżej różne sposoby definiowania entropii niezależnej od pomiaru prowadzą do tego samego wyniku. Dowód tego arcyciekawego twierdzenia rozbity jest na szereg technicznych lematów, których zrozumienie zajęło mi niemało czasu. Są one poprawne, jednak według mnie zostały zredagowane w zbyt skrótowy sposób.

Przegląd wyników rozprawy doktorskiej mgr Anny Szczepanek pozwala się zorientować, że moja entuzjastyczna opinia wyrażona w konkluzji, wyjątkowo umieszczonej na początku tej recenzji, nie jest bezpodstawna. W swojej dysertacji Autorka zajęła się trudną i ważną tematyką, i uzyskała zdumiewająco piękne rezultaty. Należy podkreślić, że sformułowała także wiele hipotez, wyznaczając nowe kierunki badań. Jestem przekonany, że o jej dalszych osiągnięciach usłyszymy w przyszłości nieraz.

Tomasz Szarek