Jan Janas
Kraków

17.07.2019 (1)

Ocena rozprawy habilitacyjnej
dr Piotra Budzyńskiego:
Operatory podstawiania w przestrzeniach L^2,
ich subnormalność, refleksywność i powiązane własności.

Na rozprawę habilitacyjną dr P. Budzyńskiego składa się 7 prac opublikowanych w dobrych i bardzo dobrych pismach. Prace [1] i [4] są wspólne z kolegami z pracy M. Ptakiem, A. Płonetą i P. Dymkiem, natomiast pozostałe publikacje rozprawy są wspólne z Z. J. Jabłońskim (UJ), I. B. Jungiem (Kyungpok - Korea Południowa) oraz J. Stochelem (UJ). Lektura około 250 stron publikacji, których niestety nie znałem wcześniej, nie była zadaniem łatwym. Oczywiście tematyka związana z badaniem nieograniczonych operatorów subnormalnych rozwijana przez J. Stochela i F. H. Szafrańca od lat 80-tych jest mi częściowo znana, ale nie dotyczy to publikacji na ten temat z ostatnich 15-20 lat.

Temat rozprawy dotyczy dwu zagadnień:

analizy subnormalności nieograniczonych w L^2 przesunięć ważonych na drzewach skierowanych oraz odpowiedzi na pytanie, które operatory przesunięcia na powyższych drzewach są refleksywne.
Oba zagadnienia dotyczą więc analizy niesamosprzężonych klas operatorów w przestrzeniach Hilberta.

Tematyka przesunięć ważonych na drzewach skierowanych stała się znana szerszej grupie matematyków po opublikowaniu przez Jabłońskiego-Junga-Stochela pracy [15] (numeracja prac z autoreferatu P. Budzyńskiego).
Była to pierwsza publikacja z powyższej tematyki, która dostarczyła możliwości konstrukcji nowych modeli dla abstrakcyjnych klas operatorów w przestrzeniach Hilberta.
Większa część publikacji z zestawu [01], ..., [07] dotyczy odpowiedzi na problem znalezienia warunków wystarczających dla subnormalności przesunięć ważonych S_λ na drzewach skierowanych $\mathcal{T} = (E, V)$ lub subnormalności operatora podstawienia C_ϕ w $L^2(X, \mu)$ (używam oznaczeń z autoreferatu).
W pracach [06] i [07] podano kryteria na subnormalność S_λ w przypadku drzewa skierowanego z pojedynczym wierzchołkiem rozgałęziającym.

Jak przypomniano w autoreferacie habilitanta w przypadku ograniczonego S_λ jego subnormalność jest równoważna temu, że ciąg $\{\|S_\lambda e_u\|^2\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa dla każdego $u \in V$. Jednak Jabłoński-Jung-Stochel podali przykład takiego niehyponormalnego S_λ (na drzewie z jednym wierzchołkiem rozgałęzienia) posiadającego gęsty zbiór C^∞-wektorów generujących ciąg momentów Stieltjesa.

Przy naturalnym założeniu gęstości zbioru $\mathrm{lin}\{e_u, u \in V\}$ w $D^\infty(S_\lambda) := \bigcap_{n=1}^{\infty} D(S_\lambda^n)$ w pracy [07] znaleziono warunek ((4.1.1)) wystarczający dla subnormalności S_λ w terminach zgodnej rodziny $\{\mu_v\}_{v \in V}$ miar probabilistycznych na $\mathbb{R}_+$ i $\{\varepsilon_v\} \in \mathbb{R}_+$ spełniających warunki (4.1.2) i (4.1.3) dla każdego $v \in V$.

Praca [06] zawiera zastosowanie wyników z [07] w sytuacji gdy drzewo V nie ma liści oraz ma dokładnie jeden wierzchołek rozgałęzienia. Widać na tym przykładzie analizy subnormalności S_λ znaczenie modelu dyskretnego przesunięć dla głębszego zrozumienia subnormalności, bez konieczności (ale nie) badania potęg operatora.

Specjalną pozycję w zestawie [01], ..., [07] pełnią moim zdaniem prace [03] i [05].

Praca [05] zawiera szczegółową analizę problemu subnormalności operatora podstawienia C_ϕ dla nieosobliwego przekształcenia ϕ dyskretnego zbioru X (tzn. X jest zbiorem przeliczalnym) z miarą σ-skończoną μ na X. Nieosobliwość ϕ oznacza, że $\mu(\phi^{-1}(x)) = 0$ dla każdego $x \in X$ takiego iż $\mu(x) = 0$. Główne wyniki [05] to odpowiedniki rezultatów z [07], które jednak wydają się być bardziej efektywne do zastosowań.

Przykładem takiego rezultatu jest Tw. 41 z [05]. Mówi ono, że jeśli powyższe ϕ jest nieosobliwe i pochodna Radona-Nikodyma $\{h_{\phi^n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem momentów Stieltjesa zaś ciąg $\{h_{\phi^{n+1}}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ jest określonym ciągiem momentów Stieltjesa dla p.w. $x \in X$. Wtedy C_ϕ jest subnormalne $\Leftrightarrow$ gdy $h_\phi > 0$ p.w. μ.

W szczególności C_ϕ jest subnormalny, jeśli $\mu(x) > 0$ dla każdego $x \in X$.

Zauważmy, że warunek $h_\phi(x) > 0$ dla każdego $x \in X$ jest spełniony $\Leftrightarrow$ gdy $\phi(X) = X$.

W pracy [03] podano pierwszy warunek dostateczny dla subnormalności nieograniczonego operatora podstawiania C_φ w $L^2(X,\mu)$ z miarą σ-skończoną μ. Jest to warunek (nazywany przez autorów warunkiem zgodności (CC)), który pojawił również w dowodzie subnormalności operatora przesunięcia ważonego S_λ na drzewie skierowanym w pracach [07] i [06]. Podana w [03] konstrukcja nieograni= czonego operatora C_φ (o zerowym jądrze), który działa na grafie lokalnie skończonym $\mathcal{G}_{2,0}$, nie jest hyponormalny i generuje ciąg momentów Stieltjesa, jest niezwykle delikatna. Bazuje ona m. in. na istnieniu specjalnych miar N-ekstremalnych powstałych przez użycie transformacji skalowania i homotetii miar Kreina i Friedrichsa. Autorzy [03] pokazują, że transformacje te zachowują wiele własności ciągu momentów Hamburgera i Stieltjesa (Tw 2.2.3, Tw. 2.2.5 i Tw 2.2.6) co jest wynikiem ciekawym samym dla siebie.

Drugim tematem rozprawy są przesunięcia ważone na drzewach skierowanych i ich własności, zawarte w [O1] i [O4].

Głównym wynikiem [O1] jest opis zbioru operatorów mnożenia z symbolami należącymi do algebry mnożników odpowiadającej przesunięciu ważonemu S_λ na drzewie skierowanym z korzeniem, jako domknięcia rodziny wielomianów tego przesunięcia, w słabej topologii operatorowej. Opierając się na tym wyniku autorzy dowodzą, że injekcyjne przesunięcia na takich drzewach, które zachowują się dobrze wzdłuż wszystkich ścieżek tego drzewa, są refleksywne.
W pracy zbadano możliwość rozkładu typu Wolda dla S_λ z dodatnimi wagami tzn. rozkładu postaci

$$\ell^2(V) = \mathrm{Ker}(S_\lambda^*) \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_\lambda^n(\mathrm{Ker}\, S_\lambda^*).$$

Pokazano, że rozkłady takie są możliwe na drzewach skierowanych, które spełniają warunek

$\|S_\lambda e_u\| = \|S_\lambda e_v\|$ dla dowolnych $u, v \in V$ takich, że $|u| = |v|$.

W pracy [04] znaleziono m. in. rozszerzenie klasycznych rezultatów A. Shieldsa o mnożnikach zawartych w jego znanej monografii, na przypadek algebry mnożników dla S_λ na drzewie skierowanym, ukorzenionym i bezlistnym. Ponadto w tym kontekście wykazano inkluzję koła $\Delta_{r_2^+(S_\lambda)} := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_2^+(S_\lambda)\}$ w widmie punktowym S_λ^*.

Wracając do specjalnej pozycji prac [03] i [05] w omawianym zestawie publikacji to moje argumenty są następujące:
praca [05] podaje pierwsze kryterium subnormalności dla nieograniczonych operatorów podstawiania w terminach istnienia mierzalnej rodziny miar probabilistycznych spełniających warunek zgodności (CC).
Wyjątkowość pracy [03] polega na tym, że mogłaby ona służyć jako zwięzłe wprowadzenie do analizy hyponormalnych i subnormalnych operatorów podstawiania w przestrzeniach dyskretnych. Ponadto praca ta uwypukla znaczenie miar N-ekstremalnych w relacji do istnienia rozwiązania dla problemu momentów Stieltjesa.

Podkreślić także należy samodzielność dr Budzyńskiego w stawianiu pytań i znajdowania na nie odpowiedzi. Widoczne to jest z lektury prac [P1] – [P19]. Ponieważ znam Pana Budzyńskiego od kilkunastu lat, to widzę jego stały rozwój i istotne poszerzenie współpracy z kolegami z Krakowa.

Podsumowując, uważam, że rozprawa habilitacyjna i cały dorobek naukowy dr P. Budzyńskiego są na dobrym poziomie i bez wątpienia spełniają wymagania Ustawy o stopniach i tytule naukowym.

Wnoszę o dopuszczenie habilitanta do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

J. Janas