Prof. dr hab. Anna Kamont
Instytut Matematyczny PAN
Oddział w Gdańsku

Sopot, 13 czerwca 2019 r.

Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr Piotra Budzyńskiego przed Radą Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Dr Piotr Budzyński ukończył studia matematyczne na Uniwersytecie Jagiellońskim w 2003 roku. Stopień doktora nauk matematycznych uzyskał w 2008 roku, również na Uniwersytecie Jagiellońskim, na podstawie rozprawy *Subnormalność C_0-półgrup operatorów kompozycji na przestrzeniach L^2*; promotorem Jego doktoratu był Profesor Jan Stochel.

Zainteresowania badawcze dr Piotra Budzyńskiego skupiają się na teorii operatorów, a dokładniej – na badaniu operatorów podstawienia i ważonych operatorów podstawienia w przestrzeniach L^2.

Dr Piotr Budzyński jest autorem lub współautorem 1 monografii oraz 18 prac opublikowanych. Z tego dorobku, monografia i 6 prac, oznaczone w autoreferacie jako [O1] – [O7], składają się na *osiągnięcie naukowe...*,[1] wymagane przez *Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym*. Zestaw ten jest zatytułowany *Ważone operatory podstawienia w przestrzeniach typu L^2: subnormalność, refleksywność oraz powiązane zagadnienia*, zaś wchodzące w jego skład prace noszą daty publikacji 2012 – 2019.

Ocena jednotematycznego cyklu prac *Ważone operatory podstawienia w przestrzeniach typu L^2: subnormalność, refleksywność oraz powiązane zagadnienia.*

Operatory podstawienia (złożenia) to operatory postaci $C_\phi f = f \circ \phi$, zaś przez ważone operatory podstawienia rozumie się operatory postaci $C_{\phi,w} f = w \cdot (f \circ \phi)$. Operatory tego typu pojawiają się w nauralny sposób w wielu dziedzinach szeroko rozumianej analizy matematycznej. Zgodnie z tytułem, omawiany cykl prac dotyczy różnych własności operatorów C_ϕ i $C_{\phi,w}$ w przestrzeniach $L^2(\mu)$. W naturalny sposób, cykl ten układa sie w dwie serie: pierwsza to prace [O7]-[O6], [O5], [O3] i [O2], a druga to [O4] i [O1].

Seria prac [O7]-[O6], [O5], [O3] i [O2]. Zacznijmy od omówienia serii prac [O7]-[O6], [O5], [O3] i [O2], których współautorami są Z. J. Jabłoński, I. B. Jung i J. Stochel. Podstawowy problem rozważany w tej serii prac to poszukiwanie warunku wystarczającego na to, by ważony operator podstawienia $C_{\phi,w}$, być może nieograniczony na przestrzeni $L^2(\mu)$, był subnormalny. Jak rozumiem, tłem dla tak postawionego problemu są następujące dwa wyniki:

[1] W dalszym ciągu, wymiennie z terminem *osiągnięcie naukowe...*, używam dawnego, poręczniejszego terminu *rozprawa habilitacyjna*.

Au

- Z jednej strony, twierdzenia Lamberta (patrz Twierdzenie 3 w autoreferacie), charakteryzujące ograniczone operatory subnormalne w terminach generowania momentów Stieltjesa.

- Z drugiej strony, Z. J. Jabłoński, I. B. Jung i J. Stochel [16] podali przykład nieograniczonego operatora podstawienia, który generuje momenty Stieltjesa, ale który nie jest hyponormalny. Implikuje to, że wspomniana powyżej charakteryzacja Lamberta operatorów subnormalnych nie rozciąga się na operatory nieograniczone.

  Odnotujmy jeszcze, że graf generowany przez operator podstawienia podany w [16] to drzewo skierowane $\mathscr{T}_{\infty,\infty}$, z tylko jednym wierzchołkiem rozgałęziającym, ale mającym nieskończenie (przeliczalnie) wiele *dzieci*.

Główny pomysł serii prac [O7]-[O6], [O5] i [O2] widzę we wprowadzeniu nowego kryterium (tzn. warunku dostatecznego) na subnormalność ważonych operatorów podstawienia – warunku istnienia mierzalnej rodziny miar probabilistycznych, związanych z rozpatrywanym operatorem przez pewne warunki zgodności. (Nie przytaczam w recenzji sformułowania tego warunku, podaję tylko odniesienia do autoreferatu.) W pracach [O7]-[O6], [O5], [O2] widzimy wprowadzenie i ewolucję tego warunku.

Pierwsza wersja tego kryterium – dla ważonych operatorów przesunięcia S_λ na drzewach skierowanych – pojawia się w pracy [O7], patrz Twierdzenie 1 i warunek (4.1) w Twierdzeniu 1 w autoreferacie. Zauważmy, że jednym z założeń Twierdzenia 1 jest $\mathscr{E}_V \subset \mathscr{D}(S_\lambda)$, istotne z uwagi na stosowaną metodę dowodu, wykorzystującą pewne techniki aproksymacyjne. Ponadto, w przypadku gdy rozważany operator S_λ ma odpowiedniu dużo wektorów quasianalitycznych, tj. gdy $\mathscr{E}_V \subset \mathscr{Q}(S_\lambda)$, to istnienie rodziny miar spełniających warunek (4.1) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na subnormalność S_λ, patrz Twierdzenie 2 w autoreferacie. Praca [O6] jest bezpośrednią kontynuacją i uzupełnieniem [O7] – w [O6] Autorzy pokazują zastosowanie ogólnych wyników z [O7] w szczególnych przypadkach: dla klasycznych ważonych przesunięć jedno- i dwustronnych – tu Autorzy "odzyskują" znane kryterim Bergera-Gellara-Wallena, patrz Twierdzenie 4 w autoreferacie oraz Theorem 3.2 w [O6], oraz dla ważonych przesunięć na drzewach skierowanych z jednym wierzchołkiem rozgałęziającym, Theorem 4.1 w [O6].

Praca [O5] kontynuuje [O7] w kierunku podania warunku wystarczającego na subnormalność dla operatorów podstawienia C_ϕ w przestrzeniach $L^2(\mu)$ na dowolnych przestrzeniach mierzalnych z miarą μ σ-skończoną, patrz Twierdzenie 5 w autoreferacie. Warunek (4.1) z Twierdzenia 1 zmienia się teraz warunek istnienia mierzalnej rodziny miar probabilistycznych, spełniających warunek zgodności w jednej z równoważnych postaci warunków (i) lub (ii) z Twierdzenia 5. W porównaniu z [O7], dowód w [O5] oparty jest na odmiennym pomyśle – Theorem 9 w [O5] pokazuje, przy założeniu (i) lub (ii), konstrukcję operatora C_Φ, będącego quasinormalnym rozszerzeniem operatora C_ϕ, zaś istnienie C_Φ - quasinormalnego rozszerzenia C_ϕ - implikuje subnormalność C_ϕ. Theorem 13 w [O5] podaje charakteryzację subnormalności dla ograniczonych operatorów podstawienia. Istotną częścią pracy [O5] jest dyskusja zastosowań i przykładów, patrz Section 3 w [O5].

Pracę [O3] widzę jako powrót do [16]. Przypomnijmy, że w [16] skonstruowano operator podstawienia na pewnej dyskretnej przestrzeni z miarą, który generuje momenty

AK

Stieltjesa i nie jest hyponormalny, zaś graf generowany przez ten operator to drzewo $\mathscr{T}_{\infty,\infty}$. W pracy [O3], celem jest skonstruowanie operatora podstawienia C_ϕ na dyskretnej przestrzeni z miarą, generującego momenty Stieltjesa i nie-hyponormalnego, dla którego graf generowany przez symbol ϕ jest lokalnie skończony i ma możliwie prostą strukturę. Taki przykład jest podany w Twierdzeniu 6 w autoreferacie. Konstrukcja tego przykładu wykorzystuje szereg różnych idei, i jest poprzedzona dogłębną analizą operatorów podstawienia dla funkcji $\phi = \phi_{\eta,\kappa}$, będącej *funkcją rodzica* na pewnej rodzinie grafów skierowanych $X_{\eta,\kappa}$ z jedną pętlą. Jak rozumiem, kluczowe jest tu zrozumienie i wykorzystanie różnicy między warunkami (i-d) oraz (i-d').

Zanim przejdę do omówienia monografii [O2], chciałabym wspomnieć o pracy [P9], wspólnej z tymi samymi współautorami, która nie wchodzi do rozprawy habilitacyjnej. Praca ta podaje charakteryzacje operatorów podstawienia, które generują momenty Stieltjesa, albo są normalne lub quasinormalne. W [O2], wyniki z [P9] są rozszerzone z operatorów podstawienia do ważonych operatorów podstawienia. Tak więc zarówno [O5], jaki i [P9] należy traktować jako prekursorów [O2].

Zwieńczeniem omawianej serii jest monografia [O2], którą z konieczności omówię dość pobieżnie. Traktuje ona ogólne ważone operatory podstawienia $C_{\phi,w}$. Po pierwsze, Chapter 3 rozszerza wyniki z [O5] z operatorów podstawienia do ważonych operatorów podstawienia. Dokładniej, w Chapter 3 podane jest kryterium (tzn. warunek dostateczny) na subnormalność $C_{\phi,w}$, w postaci istnienia pewnej mierzalnej rodziny miar probabilistycznych, spełniających odpowiednie warunki zgodności. Wynik ten jest przytoczony w autoreferacie jako Twierdzenie 7. Można zauważyć, że również metoda dowodu jest rozszerzeniem metody stosowanej w [O5], patrz sformułowanie i dowód Theorem 29 w [O2], Chapter 3.1. O równoważność różnych postaci warunków zgodności mówi Theorem 40 w [O2], Chapter 3.4. Dalej, okazuje się, że w przypadku ograniczonych ważonych operatorów podstwawienia, zaproponowane kryterium okazuje się być pełną charakteryzacją subnormalności, patrz Twierdzenie 8 w autoreferacie. Zbudowany aparat pojęciowy i dowodowy okazuje się tak silny i ogólny, że można go zastosować by w pełni scharakteryzować szereg innych własności operatorów $C_{\phi,w}$: generowanie ciągu momentów Stieltjesa, oraz bycie operatorem quasinormalnym, hyponormalnym, kohyponormalnoym i normalnym, patrz Twierdzenia 9 – 13 w autoreferacie. Wyniki przytoczone w autoreferacie jako Twierdzenia 8 – 13 znajdujemy w Chapters 2.6, 4 i 5 monografii [O2]. Chapter 6 opisuje wersję otrzymanych wyników w przypadku gdy rozważana przestrzeń mierzalna jest dyskretna, zaś w Chapter 7 dyskutowane są relacje między operatorem podstawienia C_ϕ i ważonym operatorem podstawienia $C_{\phi,w}$ z tym samym symbolem ϕ.

Seria prac [O4] i [O1]. Druga seria prac składa się z [O4], której współautorami są P. Dymek i M. Ptak, oraz z [O1], której współautorami są P. Dymek, A Płaneta i M. Ptak. Jak rozumiem, klasyczny wynik D. Saransona [24], mówiący, że operator jednostronnego przesunięcia jest operatorem refleksywnym, motywuje pytanie o refleksywność ogólnych ważonych operatorów podstawienia. Pozytywny wynik w tym kierunku, dla pewnej klasy ważonych operatorów przesunięcia na przeliczalnych, ukorzenionych i bezlistnych drzewach skierowanych, znajdujemy w autoreferacie jako Twierdzenie 19 (pochodzi ono z pracy [O1]). Kluczowe znaczenie dla dowodu tego wyniku ma wprowadzenie pojęcia mnożnika dla przesunięć ważonych na ważonych drzewach skierowanych, oraz zbadanie struktury i własności przestrzeni mnożników $\mathcal{M}(\lambda)$ i odpowiadającej jej

Ak

przestrzeni operatorów $\mathscr{M}(\lambda)$, co jest interesujące już samo w sobie. Wprowadzenie i badanie przestrzeni mnożników jest treścią pracy [O4], patrz np. Twierdzenie 14 oraz Propozycje 15 i 16 z autoreferatu, dalsze wyniki w tym kierunku, w tym Twierdzenie 17 z autoreferatu, znajdujemy w [O1].

Podsumowanie. Problematykę podejmowaną w rozprawie habilitacyjnej dr Piotra Budzyńskiego uważam za dobrze umotywowaną i niełatwą, co czyni ją matematycznie ciekawą. Wyniki wymagają głębokiego zrozumienia problemów, techniki dowodów są różnorodne, niejednokrotnie wymagają skojarzenia faktów z rozmaitych dziedzin. Wszystkie prace składające się na rozprawę habilitacyjną są współautorskie (a dokładniej, układają się w dwie serie z rozłącznymi zestawami współautorów), zaś oświadczenia współautorów mówią, że powstawały one w wyniku dyskusji i wymiany pomysłów między współautorami, i wskazują na równy udział autorów poszczególnych prac.

Dokładne dane bibliograficzne prac składających się na rozprawę habilitacyjną znajdują się w autoreferacie, ale chciałabym odnotować, że [O2] to monografia z serii Lect. Notes Math., zaś pozostałe prace ukazały się w bardzo dobrych lub dobrych czasopismach: [O3] w Adv. Math., [O5] w J. Funct. Anal., [O6] i [O7] w J. Math. Anal. Appl., [O1] w Studia Math. i [O4] w Math. Nachr.

Podsumowując, uważam, że przedstawiony przez dr Piotra Budzyńskiego cykl prac *Ważone operatory podstawienia w przestrzeniach typu L^2: subnormalność, refleksywność oraz powiązane zagadnienia* spełnia wymagania stawiane przez *Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym* by *stanowić znaczny wkład autora w rozwój określonej dyscypliny naukowej*, tu – matematyki.

Ocena pozostałego dorobku naukowego i aktywności naukowej Habilitanta

Poza pracami składającymi się na rozprawę habilitacyjną, dr Piotr Budzyński jest autorem lub współautorem 12 prac, oznaczonych w autoreferacie jako [P1] – [P12]. Pełne dane bibilograficzne tych prac, w tym nazwiska współautorów i miejsca publikacji, znajdują się np. w autoreferacie, więc ich tu nie przytaczam. Prawie wszystkie wspomniane prace dotyczą badania różnych własności operatorów podstawienia oraz ważonych operatorów podstawienia w przestrzeniach L^2. Przejrzyjmy, może nieco pobieżnie, te prace.

- Praca [P9] podaje charakteryzacje operatorów podstawienia, niekoniecznie ograniczonych, które generują momenty Stieltjesa, bądź są normalne lub quasinormalne, patrz Twierdzenie 26, oraz Propositions 8.1, 8.2 i Theorem 9.4 w [P9]. Przypomnijmy, że charakteryzacje z [P9] zostały w [O2] rozszerzone z operatorów podstawienia do ważonych operatorów podstawienia.

  [P8] podaje inną charakteryzację quasinormalnych operatorów podstawienia, patrz Twierdzenie 25; dodajmy, że dowód tego wyniku w [P8] korzysta z odpowiedniego rezultatu z [P9].

- Seria prac [P10], [P7], [P4] motywowana jest pytaniem o istnienie subnormalnego, gęsto określonego operatora złożenia C_ϕ, z trywialną dziedziną operatora C_ϕ^2.

  Ostateczną – pozytywną, przez konstrukcję przykładu – odpowiedź na to pytanie znajdujemy w [P4], patrz Twierdzenie 24 oraz Corollary 3.4 w [P4]. Wcześniejsze prace [P10] i [P7] podają słabsze przykłady w tym kierunku.

AK

- Praca [P1] prezentuje rozszerzenie konstrukcji i wyników z [O5] i [O2] do wersji dla ważonych operatorów podstawienia z wagami operatorowymi, dla dyskretnej miary μ, generującej przestrzeń $\ell^2(\mathcal{H}, \mu)$. Patrz Theorem 3.6 w [P1].

- Serię prac [P5], [P2], [P3] łączą techniki dowodowe, tj. otrzymywanie pewnych własności badanego operatora złożenia w oparciu o odpowiednie przejścia graniczne. Główne wyniki poszczególnych prac to Theorem 4.12 w [P5], wraz z dyskusją jego zastosowań w różnych przykładach, patrz np. Wniosek 21 w autoreferacie, pochodzące z [P2] Twierdzenie 22, zaś w [P3] – Theorem 5.1 i jego motywowane zastosowaniami konsekwencje, Propositions 5.2 i 5.9.

- Praca [P6] to jedyna praca w dorobku Habilitanta, która nie dotyczy operatorów złożenia lub ważonych operatorów złożenia. Jej główny wynik to 2-hyperrefleksywność pewnych podprzestrzeni generowanych przez izometrie lub ograniczone operatory quasinormalne na przestrzeni Hilberta; dokładne sformułowanie wyniku znajdujemy w autoreferacie jako Twierdzenie 23.

- Prace [P11] i [P12], które powstały przed otrzymaniem przez Habilitanta stopnia doktora, są omówione w autoreferacie.

Dodajmy jeszcze, że załącznik *Wykaz opublikowanych prac naukowych lub twórczych prac zawodowych...* opisuje różnorodną inną działalność Habilitanta, w tym udział w grantach (1 raz jako kierownik i 2 razy jako wykonawca), podaje listę referatów, wygłoszonych przez Habilitanta na konferencjach, oraz listę Jego wizyt naukowych w zagranicznych ośrodkach naukowych, a także listę wykonanych przez Habilitanta recenzji prac dla czasopism matematycznych. Podaje też dane bibliometryczne: sumaryczny *impact factor*, indeks Hirscha i liczbę cytowań; dodajmy, że wg bazy MathSciNet (12.VI.2019), prace Habilitanta były cytowane 109 razy przez 18 autorów. Zwróćmy też uwagę na udział Habilitanta w roli promotora pomocniczego w jednym, przypuszczam, że nadal trwającym, przewodzie doktorskim.

Wszystkie te dane pokazują Habilitanta jako matematyka o sprecyzowanym programie badawczym, osiągającego ciekawe rezultaty, które znajdują oddźwięk w społeczności matematycznej, aktywnie współpracującego z innymi matematykami. Uważam więc za naturalne poparcie wniosku dr Piotra Budzyńskiego o nadanie stopnia naukowego doktora habilitowanego.

Konkluzja

Uważam, że przedstawiony przez dr Piotra Budzyńskiego cykl prac *Ważone operatory podstawienia w przestrzeniach typu L^2: subnormalność, refleksywność oraz powiązane zagadnienia*, Jego pozostały dorobek naukowy oraz inna aktywność spełniają wymagania stawiane przez *Ustawę o stopniach naukowych i tytule naukowym* kandydatom do stopnia naukowego doktora habilitowanego. Z pełnym przekonaniem rekomenduję nadanie dr Piotrowi Budzyńskiemu stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Anna Kamont

Anna Kamont