

Recenzja rozprawy habilitacyjnej i dorobku naukowego  
dra Krzysztofa Bartosza  
w sprawie wniosku o nadanie stopnia doktora habilitowanego

Dr. Krzysztof Bartosz uzyskał stopień naukowy doktora nauk matematycznych w 2007 roku na podstawie rozprawy *Hemivariational inequalities modeling dynamic contact problems in mechanics* pod kierunkiem prof. dr. hab. Stanisława Migórskiego obronionej na Uniwersytecie Jagiellońskim. Następnie został zatrudniony na stanowisku asystenta, a od 2010 roku na stanowisku adiunkta w Katedrze Teorii Optymalizacji i Sterowania UJ. Osiągnięciem naukowym stanowiącym podstawę wniosku habilitacyjnego dr. Krzysztofa Bartosza jest następujący cykl 10 prac opublikowanych na przestrzeni lat 2015–2018:

- A1 K. Bartosz, Numerical methods for evolution hemivariational inequalities, Rozdział 5-ty w książce *Advances in Variational and Hemivariational Inequalities, Advances in Mechanics and Mathematics*, vol. 33, edytorzy: W. Han, S. Migórski, M. Sofonea, Springer, 2015, 109-142.
- A2 K. Bartosz, Variable time-step theta-scheme for nonlinear second order evolution inclusion, *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, vol. 14, no. 6 (2017), 842-868.
- A3 K. Bartosz, M. Sofonea, Modeling and analysis of a contact problem for a viscoelastic rod, *Zeitschrift für angewandte Mathematics und Physics*, vol. 67, no. 127 (2016), 21 stron.
- A4 K. Bartosz, L. Gasiński, Z. Liu, P. Szafraniec, Convergence of a time discretization for nonlinear second order inclusion, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* (2017)
- A5 K. Bartosz, M. Sofonea, The Rothe method for variational-hemivariational inequalities with applications to contact mechanics, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, vol. 48, no. 22 (2016), 861-883.
- A6 K. Bartosz, Convergence of Rothe scheme for a class of dynamic variational inequalities involving Clarke subdifferential, *Applicable Analysis* (2017), 1-21.
- A7 M. Barboteu, K. Bartosz, T. Janiczko, W. Han, Numerical analysis of a hyperbolic hemivariational inequality arising in dynamic contact, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, vol. 53, no. 1 (2015), 527-550.
- A8 K. Bartosz, D. Danan, P. Szafraniec, Numerical analysis of a dynamic bilateral thermoviscoelastic contact problem with nonmonotone friction law, *Computers and Mathematics with Applications*, vol. 73 (2017), 727- 746.
- A9 M. Barboteu, K. Bartosz, W. Han, Numerical analysis of an evolutionary variational-hemivariational inequality with application in contact mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 318 (2017).

- A10 M. Barboteu, K. Bartosz, D. Danan, Analysis of a dynamic contact problem with nonmonotone friction and non-clamped boundary conditions, Applied Numerical Mathematics, vol. 126 (2018), 53-77.

Prace opublikowane są w dobrych i bardzo dobrych czasopismach specjalistycznych i odnoszą się do tematyki rozprawy

*Ewolucyjne inkluzje typu Clarke'a oraz aproksymacja ich rozwiązań w oparciu o metody dyskretyzacji czasowej i przestrzennej.*

7 prac jest współautorskich, jednak warto zaznaczyć, że udział dr. Bartosza jest tu znaczny i wynosi między 50%–80% (zgodnie z załączonymi oświadczeniami). Na szczególną uwagę zasługują pozycje A5, A7 oraz A9, które opublikowane zostały w bardzo dobrych czasopismach specjalistycznych. Pierwsze dwie prace ukazały się w 2016 i w 2015 roku i były już cytowane odpowiednio 6 i 10 razy. Łączna liczba cytowań według WoS, to 85, zaś indeks Hirscha wynosi 6. Łączny dorobek publikacyjny Habilitanta składa się z 22 prac cytowanych przez 33 autorów (MathSciNet). Świadczy to o dobrym poziomie naukowym jak również o zainteresowaniu jakim cieszą się te publikacje w środowisku naukowym.

Przejdę teraz do opisu prac. Tematyka habilitacji dotyczy ewolucyjnych inkluzji typu Clarke'a. Mianowicie poszukujemy rozwiązania  $u : [0, T] \rightarrow V$  w pewnej ośrodkowej i refleksywnej przestrzeni Banacha  $V$  takiego, że  $u \in \mathcal{V} := L^p(0, T; V)$ ,  $u' \in \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} : v' \in V^*\}$  spełnia następującą inkluzję

$$(P)_E : \quad u''(t) + Au'(t) + Bu(t) + \nu^* \partial_{Cl} J(\nu u(t)) \ni f(t) \quad \text{dla p.w. } t \in (0, T)$$

wraz z warunkami początkowymi  $u(0) = u_0$  oraz  $u'(0) = u_1$ , gdzie  $A, B : V \rightarrow V^*$  są danymi operatorami,  $f : [0, T] \rightarrow V^*$ ,  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  są danymi funkcjami,  $U$  jest kolejną refleksywną przestrzenią Banacha, zaś  $\nu : V \rightarrow L^p(0, T, U)$  jest liniowym, ciągłym i zwartym operatorem. Nazwa inkluzji związana jest z obecnością subbrózniczki Clarke'a  $\partial_{Cl}$ , która definiuje operator pseudomonotoniczny  $\nu^* \partial_{Cl} J(\nu \cdot)$  dla lokalnie lipszycowskiej funkcji  $J$  (zob. Twierdzenie 24 w autoreferacie). Kolejny problem rozważany w rozprawie jest oznaczony przez  $(P')_E$  i dotyczy inkluzji z  $\nu^* \partial_{Cl} J(\nu u'(t))$  zamiast  $\nu^* \partial_{Cl} J(\nu u(t))$ . Powyższe problemy stanowią abstrakcyjne ujęcie zagadnień mechaniki kontaktowej (Rozdział 2.3 w autoreferacie).

Prace A1–A6 dotyczą istnienia rozwiązań inkluzji  $(P)_E$  oraz  $(P')_E$ . Została zastosowana znana metoda Rothe dyskretyzacji czasowej, jednak założenia narzucone na  $A, B, J, \nu$  w tych pracach wymagają modyfikacji klasycznego podejścia i są złożone pod względem technicznym. W pracy A1, dodatkowe własności operatorów pseudomonotonicznych zostały udowodnione (Proposition 5.6, Proposition 5.7) i wykorzystane w celu udowodnienia istnienia rozwiązania dyskretnego (przybliżonego) problemu Rothe. Odpowiednie ciągle i zwarte włożenia przestrzeni funkcyjnych pozwalają na przejście graniczne i rozwiązanie inkluzji  $(P)_E$  oraz  $(P')_E$ . Warto zaznaczyć, że takie rozwiązanie jest tylko jedno. Praca A2 w zasadzie uogólnia pracę A1, np. słabsze założenia dot. koercytywności operatora  $A$  zostały wprowadzone. A3 dotyczy fizycznego zachowania jednowymiarowego lepkosprężystego pręta na który działa siła zewnętrzna o gęstości  $f$ . Abstrakcyjne ujęcie tego problemu wymaga wprowadzenia dodatkowego operatora  $C : V \rightarrow W^*$  w inkluzji  $(P)_E$ . Mianowicie, oprócz subbró-

niczki Clarke'a mamy wyrażenie  $u''(t) + Au'(t) + Bu(t) + Cu(t)$ , gdzie  $C$  jest operatorem silnie ciągłym. Głównym celem pracy A4 jest osłabienie założeń pracy Emricha i Thalhamera (Found. Comput. Math 2010) i uzyskanie trudniejszego (pod względem technicznym) wielowartościowego problemu postaci  $(P')_E$ . Podobnie jak wcześniej, wykazano istnienie rozwiązań za pomocą schematu Rothe. Zdaniem recenzenta najcenniejszy i najładniejszy wynik znajduje się w pracy A5 [Theorem 3.1]. Otóż problem  $(P)_E$  został przeformułowany i zaproponowano eleganckie abstrakcyjne założenia  $H(A), H(B), H(J), H(\Phi), H(\nu), H(0)$  i  $H(s)$ , które gwarantują istnienie dokładnie jednego rozwiązania  $u \in H^1(0, T; V)$  wariacyjno-hemiwariacyjnej nierówności. Dowód oczywiście wykorzystuje metodę Rothe, ale również najnowsze wyniki dotyczące operatorów pseudomonotonicznych, np. Lea, PAMS 2011. Ponadto w rozdziale 6 pracy A5 zaprezentowano zastosowanie Twierdzenia 3.1 w mechanice kontaktowej. Tutaj użyto nowego wyniku Kality dot. zwartości Int. J. Numer. Anal. Model. 2013. Ostatecznie praca A6 kończy serię prac wskazanych w dorobku poświęconą istnieniu rozwiązań  $(P)_E$  i  $(P')_E$ . W tej pracy został rozwiązany problem mechaniki kontaktowej wykorzystując lub modyfikując metody z prac A1–A5.

Osiągnięcia w pracach A7–A9 dotyczą oszacowania błędu przybliżenia numerycznego dla ewolucyjnych inkluzji typu Clarke'a z mechaniki kontaktowej. W pracy A7, autorzy szacują różnicę pomiędzy dokładnym rozwiązaniem problemu  $u$ , a rozwiązaniem  $u^h$  problemu semidyskretnego. Udało się uzyskać liniowe oszacowanie błędu i przedstawiono wyniki symulacji numerycznych, które potwierdzają teoretyczne rezultaty. Praca A8 rozszerza poprzedni model kontaktowy uwzględniając temperaturę. Ponownie symulacje numeryczne odgrywały ważną rolę w uzyskaniu oszacowania dla dyskretnego schematu. Praca A9 odnosi się do wyników uzyskanych w pracy A5. Mianowicie model, który zbadano analitycznie w A5 [Rozdział 6] został poddany analizie numerycznej. Podobnie jak w pracach A7–A8, udało się pokazać, że błąd schematu dyskretnego można oszacować liniowo.

W ostatniej przedstawionej pracy dorobku habilitacyjnego A10, został zbadany dynamiczny problem kontaktowy ciała swobodnego, który ma postać ewolucyjnej inkluzji typu Clarke'a. Twierdzenia 3.3 wskazuje istnienie jedyne rozwiązanie tego problemu, zaś w rozdziale 4 znajdziemy podobne liniowe oszacowanie błędu schematów dyskretnych.

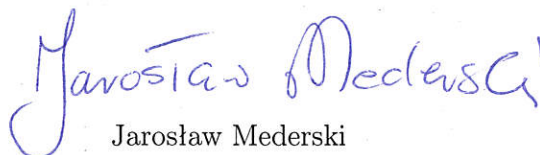
Pozostałe prace oznaczone w autoreferacie jako B1–B12, które nie wchodzą w skład osiągnięcia habilitacyjnego również odnoszą się do inkluzji różniczkowych i problemów mechaniki kontaktowej. Są one opublikowane w znanych czasopismach poświęconych nieliniowej analizie i zastosowaniom np. Applied Mathematics and Optimization, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Nonlinear Analysis.

Uważam, że rozprawa przedstawiona przez dr. Bartosza jest interesująca i najciekawsze wyniki znajdują się w pracach A1, A5–A7 oraz A9 i myślę, że ten zestaw prac byłby wystarczający do zaprezentowania osiągnięć habilitacyjnych. Autoreferat jest bardzo dobrze napisany i prowadzi czytelnika przez podstawowe pojęcia i klasyczne wyniki, aż do najnowszych rezultatów w tej dziedzinie. Autor wykazał się znajomością zaawansowanych metod dla inkluzji typu Clarke'a oraz dużą swobodą w posługiwaniu się nimi. Ponadto niejednokrotnie zaprezentował, że te metody można zmodyfikować

lub udoskonalić w celu zbadania nowych problemów mechaniki kontaktowej.

Warto zaznaczyć, że dr Bartosz współpracował dotychczas z 16 matematykami, a wśród nich są znani eksperci m.in. Sofonea Mircea (University of Perpignan) oraz Weimin Han (University of Iowa). Brał udział w kilku projektach i grantach naukowych w charakterze wykonawcy. Wygłosił kilkanaście referatów podczas międzynarodowych konferencji. Sprawuje opiekę naukową nad dwoma doktorantami w charakterze promotora pomocniczego, a jego praca dydaktyczna została nagrodzona przez Rektora UJ. Stąd jego działalność dydaktyczną, podobnie jak i działalność organizacyjną oceniam pozytywnie.

Stwierdzam, że osiągnięcia naukowe przedstawione w rozprawie habilitacyjnej i pozostały dorobek naukowy dr. Krzysztofa Bartosza spełniają warunki stawiane obecnie Ustawą o stopniach naukowych i o tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Wnoszę o dopuszczenie Habilitanta do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

  
Jarosław Mederski