

Marek Capiński
Wydział Matematyki Stosowanej AGH

Recenzja pracy doktorskiej Anny Sulimy pt.

Optimal portfolio selection in Ito-Markov Black-Scholes-Merton market.

Praca dotyczy modelu rynku składającego się z dwóch aktywów bazowych, waloru wolnego od ryzyka i akcji. Równanie nałożone na cenę akcji jest bardzo ogólne: obok procesu Wienera jako podstawowego źródła losowości, dopuszczone są skoki cen jak i losowe zmiany współczynników. Z uwagi na to model jest niezupełny. Aby temu zaradzić, rynek jest poszerzony o dodatkowe walory odpowiadające wszystkim źródłom losowości. Wyniki zawarte są w rozdziałach 3,4,5, W rozdziale trzecim mamy twierdzenie o reprezentacji martyngałów w wersji umożliwiającej dowód zupełności rozszerzonego rynku, co pokazane jest w rozdziale czwartym. Ostatni rozdział dotyczy problemu wyboru portfela maksymalizującego oczekiwaną użyteczność jego końcowej wartości. Praca jest bardzo krótka – te trzy rozdziały obejmują 24 strony.

Twierdzenie o reprezentacji jest oparte na pracy złożonej do druku napisanej wspólnie z Z.Palmowskim i Ł.Stettnerem. Nie jest jasne jaki jest udział doktorantki, więc przyjmuję, że jest to 1/3. Idea dowodu jest klasyczna: wiadomo, że wystarczy reprezentacja pojedynczej zmiennej losowej z przestrzeni L^2 co realizujemy w dwóch etapach. W pierwszym bierzemy zmienne losowe specjalnej postaci, ale takiej, że ich liniowe kombinacje są gęste w L^2 . Wybrano wielomiany i Twierdzenie 3.2.1 pokazuje ich reprezentację. Jest to wynik techniczny polegający na zastosowaniu wzoru Itô oraz całkowania przez części. Dowód ma usterkę redakcyjną polegającą na tym, że nie podano zastosowanych wzorów w części wstępnej, a odniesienia do literatury nie są wystarczające z punktu widzenia ogólności. Niemniej ta część nie budzi wątpliwości, rachunki są skomplikowane ale wydają się poprawne. Przejście graniczne jest ważniejszą częścią ale nie jest ono do końca wyjaśnione. Najpierw rozszerzenie reprezentacji do iloczynów sprowadza się do odwołania do pracy [69]. Następnie, znów odwołując się do [69], uwzględniamy sumy skończone, ale nie jest jasne przejście graniczne. W ostatnim wzorze na stronie 28 mamy całkę względem czasu od zera do nieskończoności co jest pomyłką. Wydaje się, że ta część mogłaby być znacznie rozwinięta.

Mając twierdzenie o reprezentacji, dowód zupełności modelu jest rutynowy jeśli idzie o ideę, ale jest dość złożony z uwagi na ogólność modelu. Dowód

Twierdzenia 4.2.1 nie jest jednak kompletny. Nie jest wyjaśnione dlaczego ciąg skonstruowanych strategii jest zbieżny. Ponadto mamy chyba drobny błąd w drugim wzorze w linii (4.9) gdzie prawa strona powinna być podzielona przez współczynnik wolatylności. Wątpliwości budzi wybór dodatkowych walorów, które autorka nazywa fikcyjnymi. Jeśli celem zupełności jest wyceńna instrumentów pochodnych to nasuwa się pytanie o kalibrację. Argument, że skoro walory są fikcyjne, to można dowolnie podać ich dynamikę doprowadzi do konkluzji, że równie dowolna będzie cena instrumentu. Ograniczenie ogólności modelu byłoby zasadne. Gdyby na przykład zmiana współczynników w równaniu na cenę akcji była wyznaczona przez notowany, bądź choć obserwowalny proces, albo gdyby skok cen akcji był wywołany zdarzeniem kredytowym, można by podać przykład praktycznego zastosowania. Takiego przykładu w pracy niestety nie ma.

Ostatni rozdział ma taki sam tytuł jak cała praca co nie wydaje się właściwe chyba że sugeruje się, że wyniki zawarte na ostatnich 8 stronach to istota doktoratu. Rozważane są dwa przykłady funkcji użyteczności: logarytmiczna i potęgowa. Dla logarytmicznej mamy rozszerzenie teorii E.Pladena portfeli optymalnego wzrostu. Optymalny portfel jest znaleziony przez różniczkowanie funkcji będącej pod całką dającą wielkość, którą mamy zmaksymalizować. To różniczkowanie jest względem zmiennej rzeczywistej, więc jest przeprowadzane dla ustalonych chwil oraz zdarzeń elementarnych po czym rozwiązujemy problem zerowania się pochodnej. Nie jest oczywiste, że sklejenie tych rozwiązań w procesy da strategię samofinansującą się będącą rozwiązaniem problemu. Jedyność strategii jest uzasadniona pracą [55], ale ona nie pokrywa rozważanego modelu. Dla użyteczności potęgowej stosuje się teorię sterowania stochastycznego. Podane jest rozwiązanie równania HJB ale przedstawione powyżej wątpliwości (związane z warunkiem koniecznym przy logarytmicznej użyteczności) mogą też być podniesione. Twierdzenie 5.3.1 pokazuje, że rozwiązanie równania HJB jest rozwiązaniem problemu. Dowód jest dość pobieżny, nie są starannie wyjaśnione niektóre przejścia. Na przykład argument że lokalny martyngał $v(t, z, J(t))$ jest martyngałem wydaje się co najmniej wątpliwy. Autorka pisze, że jest on prawdziwym martyngałem zastopowanym deterministyczną chwilą T co nie jest jasne (skąd ten prawdziwy martyngał?), a stopowanie chwilą deterministyczną jest trywialne. To stwierdzenie mówi w istocie, że ten proces jest martyngałem ponieważ jest on martyngałem.

Z punktu widzenia zastosowań ta część ma ograniczoną wartość, bo in-

westor nie może wykorzystać walorów fikcyjnych, więc dostarczone rozwiązanie jest niepraktyczne. Aby temu zaradzić autorka argumentuje w końcówce pracy, że mając dowolność wyboru tych walorów, możemy tak wybrać współczynniki, aby fikcyjne walory nie występowały w optymalnym portfelu. Chyba prościej byłoby ich w ogóle nie uwzględniać.

Od strony edytorskiej praca jest daleka od ideału. Celem powinien być tekst dopasowany do czytelników, którym są recenzenci, tekst, który można by czytać bez wysiłku. Niemniej jak widać z powyższych uwag uzasadnienia są niekompletne, a nawet można znaleźć, w mojej opinii, zabronione sformułowania typu "Using the same arguments like in the proof of [69, Thm. 2] it is easy to see that...". Ponadto w kilku miejscach mamy uwagi o braku arbitrażu. Autorka powołuje się na twierdzenia fundamentalne, ale cytowane źródła nie obejmują rozważanego modelu. Ponadto w sytuacji gdy rynek jest poszerzony o fikcyjne walory, pojęcie arbitrażu nie ma większego sensu. Praca jest napisana przyzwoitym angielskim ale jest wiele elementarnych błędów.

Z punktu widzenia matematyki, zaletą pracy jest ogólność modelu. Ten argument jest jednak nie do końca zasadny dla prac z zastosowań, gdzie ogólność nie jest celem samym w sobie. Zabrakło motywacji i refleksji nad sensem ekonomicznym, co dziwi, gdyż autorka ma wykształcenie ekonomiczne.

Mimo wielu uwag krytycznych uważam że praca jednak może być przyjęta jako doktorska, gdyż pokazuje dobrą orientację autorki w literaturze oraz biegłość techniczną w obrębie bardzo zaawansowanych metod. Mam tu na myśli dowody Twierdzeń 3.2.1, 4.2.1, oraz zawartość podrozdziału 5.3. Końcowa konkluzja jest pozytywna i wnoszę o dopuszczenie autorki do dalszych etapów przewodu.

Kraków, 3 kwietnia 2017.