Prof. dr hab. Andrzej Palczewski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Recenzja
poprawionej wersji rozprawy doktorskiej mgr Anny Sulimy
pt. ”Optimal portfolio selection
in Itô-Markov Black-Scholes-Merton market”

Poprawiona wersja rozprawy doktorskiej mgr Anny Sulimy jest istotnie różna od wersji wcześniejszej. Objętościowo rozprawa jest o około 50% obszerniejsza niż wersja początkowa. W recenzji nie będę powtarzał treści, które były zawarte w recenzji poprzedniej wersji – skupię się tylko na zmianach jakie zostały wprowadzone do nowej wersji rozprawy pod wpływem moich uwag krytycznych z poprzedniej recenzji. Przypomnę tylko, że rozprawa doktorska mgr Anny Sulimy dotyczy problemów optymalnego inwestowania w instrumenty finansowe, których ceny są zależne od zewnętrznego łańcucha Markowa. Autorka rozpatruje rynek finansowy, na którym ceny instrumentów są opisywane procesami Itô-Lévy'ego, przy czym współczynniki tych procesów są modulowane stanami łańcucha Markowa. Ponieważ rynek modelowany procesami Lévy'ego nie jest rynkiem zupełnym autorka dokonuje jego uzupełnienia przez wprowadzenie nieskończonego zbioru dodatkowych instrumentów: *Markovian jump securities*, *Markovian power-jump securities* oraz *impulse regime switching securities* (*impulse regime switching securities* zostały dodane w poprawionej wersji rozprawy). Finalnym celem pracy jest znalezienie portfela inwestycyjnego, który maksymalizuje użyteczność inwestycji. Postawiony problem rozprawy doktorskiej uważam za oryginalny i ciekawy.

Ocena formalna pracy. Obecna wersja rozprawy jest napisana znacznie lepiej niż wersja poprzednia. Autorka znacznie rozbudowała ekspozycje poszczególnych rozumowań oraz umieściła szereg uwag wyjaśniających. Także jakość języka angielskiego jakim napisana jest praca uległa radykalnej poprawie. Oczywiście w dalszym ciągu można znaleźć drobne błędy, ale ich liczba jest na tyle mała, że nie przeszkadza w czytaniu tekstu.

Ocena merytoryczna pracy.

Rozdział 3. Mój zasadniczy zarzut do tego rozdziału dotyczył braku dyskusji zbieżności nieskończonych sum, jakie występują w reprezentacji martyngałowej (Theorem 3.1.3). W nowej redakcji ten problem został dokładnie omówiony.

Wprowadzona została przestrzeń martyngałów całkowalnych z kwadratem ($\mathcal{M}^2$) oraz ortogonalizacja martyngałów z tej przestrzeni. Udowodnione zostało twierdzenie o reprezentacji dla zmiennej losowej (Theorem 3.1.1), z którego wyprowadzono twierdzenie o reprezentacji martyngałowej. Należy przy tym podkreślić oryginalność podejścia doktorantki, które jest istotną modyfikacją pracy Nualart&Schoutens.

Rozdział 4. Ten rozdział poświęcony jest dowodowi istnienia miary martyngałowej na rozszerzonym rynku oraz zupełności tego rynku. Problem istnienia miary martyngałowej opisany jest w twierdzeniu 4.1.6. W recenzji poprzedniej wersji rozprawy wskazywałem, że dowodzie wykazano jedynie znikanie części odpowiadającej za dryf w równaniach stochastycznych (4.2). Ten fakt gwarantował tylko, że odpowiednie procesy są lokalnymi martyngałami. W nowej wersji dowodu problem ten został szerzej omówiony i wykazano że rozważany proces jest martyngałem. Redakcja wydaje mi się trochę nieporadna, bo na początku (po Proposition 4.1.3) pojawia się zdanie *"From now on, we assume that* $\mathbb{E}\ell(t) = 1$*."*, które sugeruje zrobienie założenia *a priori*. Ale później jest Remark 4.1.5 ze spostrzeżeniem, że to założenie jest spełnione, jeśli ψ_0 oraz ψ_j są ograniczone. Ta uwaga jest dość oczywista i niewiele wnosi do dowodu, ale na str. 42 pojawia się wreszcie spostrzeżenie, że *"*ψ_0 *and* $\psi_j \ldots$ *are bounded."*. To spostrzeżenie jest poprzedzone wnikliwą analizą przy jakich założeniach jest ono prawdziwe. W moim odczuciu w tych założeniach brak jeszcze założenia o ograniczoności z dołu $\sigma_0(t)$ oraz $\sigma_j(t)$ (np. ograniczoność z dołu przez dodatnią stałą byłaby wystarczająca), ale takie dodatkowe założenie jest naturalne w finansowym kontekście modelu. Jak z tej dyskusji wynika, dowód istnienia miary martyngałowej został poprawnie uzupełniony.

Moim dodatkowym zastrzeżeniem był brak dowodu jedyności miary martyngałowej, co wydawało mi się niezbędne ze względu na wyniki Rozdziału 5 pracy. W poprawionej wersji pracy autorka poświęciła dużo uwagi omówieniu kwestii jednoznaczności miary martyngałowej na rynku zupełnym w sensie aproksymatywnym. Autorka znalazła kontrprzykład pochodzący od Artznera i Heatha pokazujący istnienie dwóch miar martyngałowych na rynku aproksymatywnie zupełnym. Omówiła też szeroko, kiedy można się spodziewać istnienia jednej miary martyngałowej (Proposition 4.2.2 oraz Proposition 4.2.3). Tym samym problem braku jednoznaczności miary martyngałowej został w sposób zadowalający przez doktorantkę wyjaśniony.

Rozdział 5. Zasadnicze zastrzeżenia do wyników Rozdziału 5 wynikały z faktu, że dowody twierdzeń o istnieniu optymalnej strategii inwestycyjnej przebiegały tak, jakby była możliwa dokładna replikacja każdego instrumentu (a nie replikacja aproksymatywna). W poprawionej wersji pracy te twierdzenia zostały właściwie sformułowane i udowodnione. Niestety poprawienie tych twierdzeń spowodowało utratę największej zalety używania logarytmicznej lub potęgowej funkcji użyteczności, czyli uzyskanie analitycznych wzorów na optymalne strategie. W zasadzie okazało się, że w ogóle trudno jest mówić o znalezieniu optymalnych strategii. Uzyskane wyniki (Theorem 5.2.1 oraz Theorem 5.3.2) mówią tylko, że jeśli odpowiedni układ równań stochastycznych posiada rozwiązania, to optymalna strategia jest jednym z tych rozwiązań. Niestety nie ma dowodu, że odpowiednie równania posiadają rozwiązania, ani że rozwiązania takie są jednoznaczne. A dopiero jednoznaczność strategii pozwala na wykorzystanie takich wyników w praktyce inwestycyjnej. Poprawia trochę tę sytuacje obserwacja, że dla skończenie-wymiarowej aproksymacji istnieją już jednoznacznie wyznaczone strategie inwestycyjne. Niestety przejście od przypadku skończenie-wymiarowego do nieskończenie-wymiarowego nie ma ścisłego uzasadnienia. Remark 5.1.1 zawiera jedynie długą listę warunków, jakie muszą być spełnione, aby to przejście było możliwe.

Konkluzja. Recenzowana rozprawa atakuje trudny problem wymagający szerokiej wiedzy z analizy stochastycznej. Autorka miała pomysł, jak ten problem rozwiązać, ale nie przewidziała skali piętrzących się na jej drodze trudności. W poprawionej wersji rozprawy początkowy zamysł został zrealizowany w nieco innej formie, ale otrzymany wynik jest także wartościowy. Reasumując uważam, że praca mgr Anny Sulimy spełnia w obecnej postaci wymogi Ustawy ”O stopniach naukowych i tytule naukowym” i wnoszę o dopuszczenie autorki do dalszego toku przewodu doktorskiego.

Warszawa, 10 października 2018 r.