

Prof. dr hab. Andrzej Palczewski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

Recenzja
rozprawy doktorskiej mgr Anny Sulimy
pt. "Optimal portfolio selection
in Itô-Markov Black-Scholes-Merton market"

Rozprawa doktorska mgr Anny Sulimy dotyczy problemów optymalnego inwestowania w instrumenty finansowe, których ceny są zależne od zewnętrznego łańcucha Markowa. Autorka rozpartuje rynek finansowy, na którym ceny instrumentów są opisywane procesami Itô-Lévy'ego, przy czym współczynniki tych procesów są modulowane stanami łańcucha Markowa. Ponieważ rynek modelowany procesami Lévy'ego nie jest rynkiem zupełnym autorka dokonuje jego uzupełnienia przez wprowadzenie nieskończonego zbioru dodatkowych instrumentów zwanych *power-jump assets*. Finalnym celem pracy jest znalezienie portfela inwestycyjnego, który maksymalizuje użyteczność inwestycji. Ze względu na skomplikowany model rynku finansowego osiągnięcie tego celu wymaga kilku kroków. Krokami tymi są: udowodnienie twierdzenia o reprezentacji martyngałowej dla rozpatrywanego modelu rynku, wykazanie istnienia jedynej miary martyngałowej na rozszerzonym rynku oraz udowodnienie zupełności rynku (w sensie aproksymatywnym). Dopiero po uzyskaniu tych wyników pomocniczych autorka przystępuje do rozwiązania problemu optymalnego portfela inwestycyjnego, który maksymalizuje wybraną funkcję użyteczności.

Rozprawa złożona jest z 5 rozdziałów. Rozdział 1 zawiera sformułowanie celu rozprawy oraz omówienie prac, które dotyczą problemów podobnych do tych analizowanych w pracy. Następnie w rozdziale tym przedstawione są główne wyniki otrzymane w pracy. W rozdziale 2 opisany jest rynek finansowy modelowany procesami Itô-Lévy'ego oraz przedstawiono metodę rozszerzania tego modelu przez dodanie przeliczalnego zbioru dodatkowych instrumentów typu *power-jump*. Rozdział 3 zawiera twierdzenie o reprezentacji martyngałowej na rozszerzonym rynku. W rozdziale 4 pokazano twierdzenie o istnieniu jedynej miary martyngałowej na rozszerzonym rynku oraz udowodniono zupełność tego rynku. Wreszcie rozdział 5 zawiera rozwiązanie głównego problemu znalezienia optymalnych portfeli inwestycyjnych. Zadanie to jest rozwiązane dla dwóch standardowych funkcji użyteczności: funkcji logarytmicznej oraz funkcji potęgowej.

Postawiony problem rozprawy doktorskiej jest oryginalny i ciekawy. Sam problem uzupełniania rynku Lévy'ego o nieskończony zbiór instrumentów typu *power-jump* był już rozwiązany wcześniej. W literaturze znane są prace, w których

dowodzono twierdzenie o reprezentacji martyngałowej na takim rynku, o istnieniu jedynej miary martyngałowej i zupełności takiego rynku. Wszystkie te wyniki dotyczyły jednak zwykłych procesów Lévy'ego. Tymczasem w pracy mgr Sulimy mamy procesy Itô-Lévy'ego dodatkowo modulowane łańcuchami Markowa. Ta modulacja jest oczywiście niezbędna, jeśli chcemy się zajmować problemem sterowania na rynku finansowym (łańcuch Markowa jest procesem sterującym), ale jednocześnie wprowadza dodatkowe trudności przy konstrukcji zupełnego rynku, na którym zadanie optymalnego sterowania ma być rozwiązywane. Kroki jakie autorka wybrała, aby osiągnąć ten cel, są naturalne, jeśli patrzeć na podejście stosowane dla zwykłych procesów Lévy'ego.

Ocena formalna pracy. Jako rozprawa doktorska praca jest napisana źle. Forma pracy jest podobna do formy jaką zwykle używa się przy publikacjach w czasopismach naukowych, kiedy autor/autorzy eksponują wyłącznie swoje oryginalne osiągnięcia, wszystkie znane elementy pozostawiając do uzupełnienia czytelnikowi. W przypadku rozprawy doktorskiej czytelnikami są w zasadzie wyłącznie recenzenci. To nie doktorant powinien sprawdzać, czy recenzenci są wystarczająco wykształceni, aby uzupełnić luki w dowodach, ale recenzenci mają sprawdzić, czy doktorant w wystarczającym stopniu opanował dziedzinę, aby zauważyć luki dowodowe i umieć je uzupełnić.

Praca jest napisana po angielsku. Niestety w tekście jest bardzo dużo błędów ortograficznych, gramatycznych i stylistycznych. Część tych błędów autorka powinna zauważyć przy dokładnym czytaniu tekstu (a nie zauważyła). Oczywiście jak zwykle w przypadku autora polskiego jest bardzo dużo błędów z użyciem rodzajnika *a* oraz *the*. Niektóre z tych błędów można łatwo poprawić. Ale są sformułowania, w których napisanie np. *an assumption* lub *the assumption* jest równie poprawne, ale co innego znaczy! Starłem się w takich sytuacjach domyślać rzeczywistej intencji autorki, ale nie jest to sytuacja komfortowa dla czytelnika.

Ocena merytoryczna pracy.

Rozdział 3. W rozdziale tym dowodzone jest twierdzenie o reprezentacji martyngałowej (Theorem 3.1.1). Twierdzenie ma postać: jeśli M jest martyngałem względem filtracji \mathcal{F}_t , to martyngał ten ma przedstawienie w postaci pewnych całek (nie przytaczam dokładnego sformułowania, bo nie jest mi ono potrzebne). Problemy z tym twierdzeniem są dwa. Po pierwsze, w całej pracy nigdzie nie napisano jaka to jest filtracja \mathcal{F}_t , a problem nie jest zupełnie oczywisty, bo prócz zwykłego procesu Itô-Lévy'ego mamy jeszcze modulujący go łańcuch Markowa. W efekcie nie wiemy przy jakich założeniach zachodzi sformułowane twierdzenie. Drugim problemem jest występowanie w reprezentacji martyngałowej nieskoń-

czonych sum. Oczywiście takie sumy muszą wystąpić, jeśli rynek został uzupełniony nieskończonym zbiorem dodatkowych instrumentów. Ale nie jest sprawą oczywistą, że te nieskończone sumy są zbieżne (i w jakim sensie). Z dowodu można się oczywiście domyślić, że zbieżność powinna być w sensie przestrzeni L^2 . Jednak na temat samej zbieżności nie ma w pracy nawet jednego zdania, tak jakby to była sprawa oczywista. Nie jest to jednak oczywiste, co widać z pracy Nualart&Schoutens (pozycja [69] w spisie literatury), na której doktorantka się wzorowała. W pracy [69] autorzy, aby otrzymać twierdzenie o reprezentacji martyngałowej, dokonali rozwinięcia dowolnego martyngału całkowalnego z kwadratem w tzw. martyngały Teugelsa, bo to rozwinięcie dostaje się w sposób naturalny. Następnie dokonali ortogonalizacji martyngałów Teugelsa i do wykazania zbieżności nieskończonych szeregów użyli standardowej własności przestrzeni L^2 , tj. zbieżności z kwadratem współczynników przy przedstawieniu elementu w bazie ortogonalnej. Tego wszystkiego brakuje w dowodzie w recenzowanej pracy doktorskiej. Oczywiście wydaje się, że metodę zastosowaną przez Nualarta i Schoutensa można zastosować także w tej bardziej skomplikowanej sytuacji, ale wypada o tym napisać.

Rozdział 4. Ten rozdział poświęcony jest dowodowi istnienia miary martyngałowej na rozszerzonym rynku oraz zupełności tego rynku. Problem istnienia miary martyngałowej opisany jest w twierdzeniu 4.1.3. Rozumowanie jest takie: jeśli w równaniach stochastycznych (4.4) zniknie część odpowiadająca za dryf (współczynnik przy dt), to procesy opisywane tymi równaniami będą martyngałami. Warunek znikania dryfu pozwala wyznaczyć współczynniki w przedstawieniu pochodnej Radona-Nikodyma opisującej zamianę miary. Współczynniki te spełniają założenia twierdzenia 4.1.1 pochodzącego z pracy [12]. Niestety z twierdzenia 4.1.1 wynika jedynie, że pochodna Radona-Nikodyma jest **lokalnym martyngałem**. Należałoby jeszcze wykazać, że pochodna ta jest martyngałem. Tego w dowodzie twierdzenia 4.1.3 brakuje. Trudno więc uważać, że równoważna miara martyngałowa została skonstruowana. Dodatkowym problemem jest jedność tej miary, co jest niezbędne, aby udowodnić aproksymatywną zupełność rynku. Sądząc po tym, co na temat jedności napisali autorzy pracy [18], nie jest to sprawa prosta. W efekcie twierdzenie 4.2.1 zawiera poprawny dowód pod warunkiem, że istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa równoważna mierze wyjściowej. Mówiąc o twierdzeniu o zupełności rynku, zwróćmy uwagę, że jest to zupełność w sensie aproksymatywnym. Oznacza to, że dla każdego instrumentu finansowego na rynku istnieje ciąg strategii inwestycyjnych, które replikują ten instrument w przybliżeniu (z błędem dążącym do zera) a nie dokładnie. Ten aspekt zupełności został dobrze opisany w recenzowanej pracy.

Rozdział 5. W rozdziale tym dowodzone są twierdzenia o istnieniu optymalnej strategii inwestycyjnej na rynku Itô-Lévy-Markov. Problem jest rozpartywany dla logarytmicznej funkcji użyteczności (Theorem 5.2.1) oraz potęgowej funkcji

użyteczności (Theorem 5.3.1). Dowody tych twierdzeń przebiegają jednak tak, jakby była możliwa dokładna replikacja każdego instrumentu (a nie replikacja aproksymatywna). Takie postępowanie było możliwe w pracy [92], na którą powołuje się autorka, ponieważ w pracy tej rynek został rozszerzony o skończoną liczbę dodatkowych instrumentów, co pozwala udowodnić klasyczną zupełność rynku. W sytuacji rynku Itô-Lévy-Markov mamy tylko aproksymatywną zupełność. Wymaga to rozwiązania problemu optymalnej strategii inwestycyjnej w sposób aproksymatywny, czyli wykazanie istnienia ciągu strategii, które rozwiązują zadanie optymalizacyjne w sposób przybliżony. Ten problem nie jest poprawnie opisany w dowodach odpowiednich twierdzeń.

Konkluzja. Recenzowana rozprawa atakuje trudny problem wymagający szerokiej wiedzy z analizy stochastycznej. Autorka ma dobry pomysł, jak ten problem rozwiązać. Jednak w realizacji tego pomysłu zabrakło jej uwagi (a być może dostatecznie głębokiej wiedzy). Reasumując uważam, że praca mgr Anny Sulimy nie spełnia w obecnej postaci wymogów Ustawy "O stopniach naukowych i tytule naukowym". Uważam, że autorka powinna dopracować brakujące w pracy dowody i ponownie przedstawić ją do recenzji.

Warszawa, 10 kwietnia 2017 r.

