OCENA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ MGR TOMASZA KOWALCZYKA

Rozprawa doktorska Pana mgr Tomasza Kowalczyka dotyczy odpowiedników twierdzeń Cartana A i B w rzeczywistej geometrii algebraicznej. Wpisuje się ona w modny ostatnio trend "ulepszania" rzeczywistej geometrii algebraicznej za pomoca rozdmuchań. Twierdzenia Cartana A i B swoją siłę pokazuja w teorii przestrzeni Steina i w geometrii algebraicznej zespolonej są już mniej ciekawe (tzn. są tam o wiele prostsze). Jednak są to twierdzenia wciąż fundamentalne. W przypadku gładkich podrozmaitości analitycznych rzeczywistych przestrzeni $\mathbb{R}^n$ twierdzenia Cartana wciąż są prawdziwe. Jednak przestaje to być prawdą w geometrii algebraicznej rzeczywistej. Głównym celem rozprawy jest pokazanie, że dla gładkiej podrozmaitości afinicznej $X \subset \mathbb{R}^n$ i snopa koherentnego $\mathcal{F}$ na X można tak rozdmuchać X by twierdzenia Cartana A i B wciąż zachodziły (dla twierdzenia B autor potrzebuje pewnego dodatkowego warunku). Bardziej dokładnie w przypadku twierdzenia Cartana A autor dowodzi:

Twierdzenie 4.12 *Niech $\mathcal{F}$ będzie snopem koherentnym na X. Wtedy istnieje rozdmuchanie $\sigma : X_\sigma \to X$ i skończenie wiele sekcji globalnych $s_1, .., s_k$ snopa $\sigma^*(\mathcal{F})$, które generują włókna snopa $\sigma^*(\mathcal{F})$.*

W celu znalezienia odpowiednika twierdzenia B autor wprowadza ciekawe same w sobie "rozdmuchane" kohomologie Cecha. Autor wykazuje się przy tym sporą sprawnością techniczną. Ta konstrukcja niewątpliwie zasługuje na uwagę. Autor pokazuje , że rozdmuchania X tworzą zbiór uporzadkowany, a zatem można wprowadzić rozdmuchane kohomologie jako granicę prostą kohomologii pochodzących od tych rozdmuchań. Używając "rozdmuchanych" kohomologii ($\tilde{H}$) autor dowodzi:

Twierdzenie 6.9 *Niech $\mathcal{F}$ będzie snopem koherentnym na X i $hdim\, \mathcal{F} \leq 1$. Niech $\mathcal{U}$ będzie skończonym pokryciem otwartym X. Wtedy dla każdego $q \geq 1$ $\tilde{H}^q(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ i zatem $\tilde{H}^q(X, \mathcal{F}) = 0$.*

Pan Kowalczyk pokazuje też zastosowanie powyższego twierdzenia do rozwiązania addytywnego problemu Cousina (też w "rozdmuchanej" wersji). Dowody autora są proste i naturalne, co pokazuje, że dobrze rozumie on teorię którą się posługuje. Praca zawiera też liczne przykłady dobrze ilustrujące teorię. Najciekawszym z nich, a jednocześnie najprostszym jest przykład pokazujący. że $H^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}) \neq 0$.

Omówię teraz nieliczne usterki, które nie wpływają na ocenę rozprawy:

1) notacja czasami jest zbyt skrótowa co utrudnia czytanie

2) Uwaga 2.12 na stronie 15 nie ma sensu. Notacja Kollara $\sigma^{-1}(\mathcal{I})$ różni się od notacji autora. W notacji Kollara $\sigma^{-1}(\mathcal{I})(U) = lim_{\sigma(U)\subset V}\mathcal{I}(V)\circ\sigma \subset \mathcal{O}_{\tilde{X}}(U)$. Zatem u Kollara snop $\sigma^{-1}(\mathcal{I})$ jest podsnopem snopa $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ i zatem symbol $\sigma^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ ma sens. U autora nie. Nie można też mówić, że snopy $\sigma^{-1}(\mathcal{I}) \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ i $\sigma^{-1}(\mathcal{I}) \otimes_{\sigma^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ są izomorficzne. Trudno mi zrozumieć po co autor tą uwagę zamieścił. Autor potrzebuje z pracy Kollara jedynie twierdzenie o pryncypializacji ideału i nie ma niebezpieczeństwa by terminologie autora i Kollara gdzieś się skrzyżowały.

Praca wydaje się być napisana poprawnie po angielsku, chociaż nie jestem tu wybitnym ekspertem.

Podsumowując uważam rozprawę za ciekawą pracę matematyczną, która spełnia wszystkie wymogi Ustawy o tytule naukowym i stopniach naukowych konieczne do uzyskania stopnia doktora. Myślę , że praca zasługuje na wyróżnienie.

Zbigniew Jelonek

(Z. Jelonek) Instytut Matematyczny, Polska Akademia Nauk, Śniadeckich 8, 00-956 Warszawa, Poland

E-mail address: najelone@cyf-kr.edu.pl