OPINIA O ROZPRAWIE DOKTORSKIEJ PAWŁA RAŹNEGO
THE BASIC $DD^{\mathcal{J}}$-LEMMA

Olsztyn, 02.04.2019

Prof. dr hab. Aleksy Tralle

Uniwersytet Wamińsko-Mazurski

1. Omówienie rozprawy

Rozprawa doktorska jest poświęcona własnościom różniczek algebry form różniczkowych na sfoliowanej rozmaitości ze strukturą transwersalną, nazywanej "dd^c-,$dd^{\mathcal{J}}$-,...-lematami". W pierwotnej wersji odpowiednie zjawisko zostało odkryte przez Deligne'a, Griffithsa, Morgana i Sullivana w fundamentalnej pracy *Real homotopy theory of Kaehler manifolds*, Invent. Math., 1975. Wersja ta dotyczyła rozmaitości Kaehlera i jest formułowana następująco.

Twierdzenie 1. *Niech M będzie zwartą rozmaitością Kaehlera, a α będzie formą różniczkową taką, że $d\alpha = 0$ oraz, albo $\alpha = d\beta$, albo $\alpha = d^c\beta$. Wówczas*

$$\alpha = dd^c\gamma = -d^c d\gamma,$$

gdzie $d^c = J^{-1}dJ$ dla struktury zespolonej J rozmaitości Kaehlera M.

Powyższe twierdzenie ma znaczenie fundamentalne, ponieważ łączy ze sobą analityczne, topologiczne i strukturalno-geometryczne własności (teorię Hodge'a, strukturę zespoloną, metrykę Kaehlera i teorię homotopii). Z dd^c-lematu wynika własność formalności rozmaitości Kaehlera, która oznacza, że wymierny typ homotopii takich rozmaitości (a także innych spełniających dd^c-lemat) jest w pełni określony przez dane kohomologiczne. Zatem, nie ma nic dziwnego w tym, że różne wersje dd^c-lematu są badane od wielu lat. Oczekuje się, że dobra nowa wersja związana z interesującą strukturą geometyczną da rezultaty o podobnej mocy jak klasyczny wynik Deligne'a i współautorów. Wzorując się w pewnej mierze na pracach Cavalcanti'ego autor niniejszej rozprawy proponuje badanie uogólnionych struktur zespolonych, ale w nowym ujęciu struktur transwersalnych. Jest to podejście, które bardzo wysoko cenię, ponieważ jest ogólniejsze, zawiera w sobie wyniki poprzedników, a jednocześni nie jest bezpośrednie.

W rozprawie rozważa się foliacje $(M, \mathcal{F})$ na rozmaitości M i transwersalne uogólnione struktury zespolone $\mathcal{J}$ (w sensie Cavalcanti'ego). Niech $(M, \mathcal{J})$ oznacza uogólnioną rozmaitość zespoloną. Zgodnie z Proposition 3.3 i Theorem 3.24 rozprawy, mamy operatory

$$\partial = \pi_{k+1} \circ d : \Gamma(U^k) \to \Gamma(U^{k+1})$$

$$\bar{\partial} : \pi_{k-1} \circ d : \Gamma(U^k) \to \Gamma(U^{k-1}),$$

gdzie $\pi_k : \Omega(M, \mathbb{C}) \to \Gamma(U^k)$ jest rzutowaniem określonym na formach różniczkowych. Niech $d^{\mathcal{J}} = i(\bar{\partial} - \partial)$. Wówczas $\mathcal{J}$ jest uogólnioną strukturą zespolona wtedy i tylko wtedy gdy $d = \partial + \bar{\partial}$. Autor definiuje "podstawowy $dd^{\mathcal{J}}$-lemat" jako własność

$$(\mathrm{Im}(dd^{\mathcal{J}}) = \mathrm{Im}(d) \cap \mathrm{Ker}(d^{\mathcal{J}}) = \mathrm{Ker}(d) \cap \mathrm{Im}(d^{\mathcal{J}})$$

spełnione dla form bazowych.

Główne wyniki rozprawy to

- Charakteryzacja $dd^{\mathcal{J}}$-lematu w języku kohomologii bazowych (Theorem 4.11 i Theorem 4.13)
- Charakteryzacja $dd^{\mathcal{J}}$-lematu poprzez znikanie kanonicznego ciągu spektralnego (Theorem 4.14)
- Zastosowanie rozwiniętych technik do transwersalnie symplektycznych foliacji. W szczególności, bardzo istotne jest twierdzenie o tym, że w sytuacji symplektycznej odpowiednia wersja $dd^{\mathcal{J}}$-lematu ("dd^{Λ}-lemma") implikuje, że odwzorowanie Lefschetza dla bazowych kohomologii jest "na" (Theorem 4.17, Corollary 4.19)
- Dowód dd^{Λ}-lematu dla transwersalnie kaehlerowskich foliacji (Theorem 4.21).
- Przykłady foliacji, których kohomologie bazowe są skończenie bądź nieskończenie wymiarowe dla różnych stopni.

2. Ocena

2.1. Ocena tematyki rozprawy. Tematyka rozprawy znajduje się w głównym nurcie badań w geometrii i topologii rozmaitości z foliacją ze strukturą transwersalną. Własności kohomologiczne takich rozmaitości były badane w niedawnych pracach Angelli i Tomassiniego, Cavalcanti'ego, Schweitzera i innych. W tym ciągu prac bardzo dobrych matematyków rozprawa Pawała Raźnego prezentuje się bardzo dobrze.

2.2. Ocena wyników rozprawy. Główne wyniki rozprawy, tzn. charakteryzacja bazowego $dd^{\mathcal{J}}$-lematu, są nowe i ciekawe.

2.3. **Ocena poprawności pracy.** Przedstawione dowody głównych twierdzeń rozprawy są, moim zdaniem, poprawne.

2.4. **Ocena prezentacji.** Praca doktorska jest napisana na wysokim poziomie naukowym. Prezentacja rozprawy jest na ogół bardzo dobra. Widać, że Autor głęboko przemyślał temat i posiada stosowną wiedzę. Pewne moje zastrzeżenia budzi brak jasnego wkazania, które to twierdzenia są jednoznacznie autorskie, a które są uzupełnieniami, twierdzeniami z których się korzysta itd. Jako osoba dobrze znająca różne wersje dd^c-lematu, nie miałem z tym większych problemów, uważam jednak to za wadę prezentacji.

2.5. **Ocena publikacji.** W związku z tym, że nowy tryb nadawania stopni doktorskich wymaga, aby część wyników była opublikowana, nadmienię, że wyniki rozprawy są częściowo opublikowane w artykułach:

(1) Examples of foliations with infinite dimensional special cohomology, Annali di Matematica 197(2018),399-409
(2) The Froelicher type inequalities of foliations, J. Geom. Phys. 114(2017), 593-606

Journal of Geometry and Physics jest jednym z wiodących czasopism w obszarze geometrii i jej zastosowań.

3. Konkluzja

Podsumowując uważam, że rozprawa z nawiązką spełnia wszystkie formalne i zwyczajowe wymagania stawiane pracom doktorskim. Wnioskuję o dopuszczenie Pana Pawła Raźnego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tralle