Instytut Matematyczny PAN

ul. Śniadeckich 8, 00-656 Warszawa

prof. dr hab. Janusz Grabowski

e-mail: jagrab@impan.pl

Warszawa, 27 marca, 2019 r.

Ocena rozprawy doktorskiej pana mgr. Pawła Raźnego

pt. *"The basic $dd^{\mathcal{J}}$-lemma"*

Pan magister Paweł Raźny przedstawił do oceny swoją rozprawę doktorską pt. *The basic $dd^{\mathcal{J}}$-lemma*, napisaną pod kierunkiem dr. hab. Roberta Wolaka, profesora UJ. Rozprawa ta dotyczy pewnych aspektów geometrii różniczkowej i zawiera rozwiązanie kilku oryginalnych problemów naukowych, które pokrótce omówię.

1. Rozprawa

Głównym tematem rozprawy są pewne kohomologiczne własności foliacji rozmaitości różniczkowych, posiadających geometryczne struktury transwersalne. Po krótkim wstępie (może nawet nadmiernie krótkim), autor przechodzi do prezentacji koncepcji struktury transwersalnej do danej foliacji $\mathcal{F}$ kowymiaru q, w tym teorii Hodge'a i operatorów eliptycznych. W największym skrócie, gdy zbiór liści foliacji $M/\mathcal{F}$ posiada kanoniczną strukturę rozmaitości różniczkowej (wymiaru q), są to odpowiednie struktury na tej rozmaitości.

W kolejnym rozdziale omówione są podstawy, pochodzącej jeszcze od N. Hitchina i jego doktoranta Marco Gualtieriego (2002), *uogólnionej geometrii zespolonej*. Wychodzi ona od nawiasu Couranta na wiązce Pontryagina $TM \oplus T^*M$, dla którego wyróżnia się tensor Nijenhuisa

$$\mathcal{J} : TM \oplus T^*M \to TM \oplus T^*M\,,$$

ortogonalny względem naturalnego symetrycznego parowania w $TM \oplus T^*M$ i taki, że $\mathcal{J}^2 = -Id$. Siła tej teorii bierze się z faktu, że taki tensor można naturalnie skonstruować zarówno ze struktury zespolonej na M jak i struktury symplektycznej. Teoria ta naturalnie uogólnia więc i jednoczy, z jednej strony, geometrię zespoloną, z drugiej – geometrię symplektyczną.

W teorii tej można zdefiniować analogi operatorów kohomologii Dolbeault'a $\bar{\partial}$ i ∂, znanych z geometrii zespolonej, i odpowiednie podwójne kompleksy łańcuchowe zespolonych form różniczkowych. Kładąc $d^{\mathcal{J}} = i(\bar{\partial} - \partial)$, otrzymujemy nowy operator w przestrzeni $\Omega^\bullet(M, \mathbb{C})$ takich form. Jest to obiekt fundamentalny dla rozprawy i dla lepszego jego zrozumienia przydałby się w pracy opis Lie-algebraicznego działania tensora $\mathcal{J}$ na formy różniczkowe (a nie tylko odesłanie do literatury).

Mówimy, że uogólniona struktura zespolona $(M, \mathcal{J})$ *spełnia $dd^{\mathcal{J}}$-lemat*, gdy

$$Im(d) \cap Ker(d^{\mathcal{J}}) = Ker(d) \cap Im(d^{\mathcal{J}}) = Im(dd^{\mathcal{J}})\,.$$

Analogicznie definiuje się *$\partial\bar{\partial}$-lemat.* Warunek wygląda dość technicznie ale, jak pokazał G. Cavalcanti w [8] – kolejny doktorant Hitchina, jest on równoważny własności mówiącej, że naturalne włożenie

$$j : (Ker(d^{\mathcal{J}}), d) \to (\Omega^{\bullet}(M, \mathbb{C}), d)$$

indukuje izomorfizm w kohomologiach. To z kolei uogólnia wyniki znane oddzielnie dla struktur zespolonych i symplektycznych i właśnie "transwersalna/bazowa" wersja tego twierdzenia jest głównym wynikiem rozprawy, wymienionym w tytule.

Następny rozdział zawiera więc podstawowe pojęcia i fakty dotyczące *tranwersalnych uogólnionych struktur zespolonych* oraz bazową wersję $dd^{\mathcal{J}}$-lematu. Jej zastosowanie do struktur tranwersalnie symplektycznych obejmuje również foliacyjną wersję dualności Poincarego: odwzorowanie Lefschetza

$$L^k : H^{q-k}(M/\mathcal{F}) \to H^{q+k}(M/\mathcal{F})$$

jest surjektywne. Wyniki są mocno techniczne i rozdział ten mocno korzysta z pracy doktorskiej G. Cavalcanti'ego [8], pracy A. Wade [36] oraz pracy [6] Baki i Czarneckiego (numeracja według bibliografii rozprawy). Rozdział zawiera również wnioski dla transwersalnie symplektycznych, homologicznie orientowalnych foliacji riemannowskich na zwartych rozmaitościach. Podstawowym jest fakt, że dla transwersalnie kählerowskich, homologicznie orientowalnych foliacji na zwartych rozmaitościach odpowiedni $dd^{\mathcal{J}}$-lemat (tzn. $\partial\bar{\partial}$-lemat) zachodzi (Cordero-Wolak [12]). Co więcej, bazowy $\partial\bar{\partial}$-lemat dla transwersalnie holomorficznych foliacji implikuje degenerację ciągu spektralnego Frölichera na pierwszej stronie oraz rozkład Hodge'a w kohomologiach bazowych.

Rozdział piąty poświęcony jest nierównościom typu Frölichera dla podwójnych kompleksów łańcuchowych, oczywiście w wersji "transwersalnej" (bazowej), z naciskiem na przypadek transwersalnie holomorficzny i transwersalnie symplektyczny. Główny wniosek dotyczy skończoności wymiaru oraz dualności dla kohomologii Botta-Cherna i Aeppli'ego. Wyniki są naturalnymi uogólnieniami znanych rezultatów, lecz zbyt skomplikowane technicznie by je tutaj omawiać bardziej szczegółowo.

Pracę zamyka rozdział poświęcony przykładom. Najciekawszy wydaje mi się przykład foliacji kowymiaru 4, dla której kohomologie bazowe są nieskończeniewymiarowe w stopniach 2 i 4 i skończenie-wymiarowe w stopniu 3. Nieco mi jednak brak jakiś przykładów kanonicznych.

2. Uwagi szczegółowe

Pan mgr Raźny nie wyróżnia w sposób wystarczająco jednoznaczny, które z rezultatów są jego osobistym dokonaniem, więc recenzent zdany jest na własne siły. Jest to o tyle trudne, że wszystkie wyniki mają korzenie w obserwacjach znanych z literatury. Bibliografia odwołuje się do trzech prac autora, w tym jednej wspólnej z dr. Czarneckim i jednego preprintu.

Najważniejsza wydaje się tutaj samodzielna publikacja [32] w *J. Geom. Phys.*, która zasadniczo zawiera rezultaty rozdziału piątego rozprawy. Jest to rozszerzenie nierówności typu Frölichera, znanych dla rozmaitości symplektycznych i zespolonych, na przypadek foliacji transwersalnie holomorficznych i transwersalnie symplektycznych oraz twierdzenie o skończoności wymiaru odpowiednich kohomologii Botta-Cherna i Aeppli'ego (Twierdzenie 5.10, 5.11 i 5.15).

Rezultaty preprintu [31] zajmują przede wszystkim rozdział 4. Główne wyniki koncentrują się na równoważności pewnych warunków z bazowym $dd^{\mathcal{J}}$-lematem dla tranwersalnych, uogólnionych struktur zespolonych (Twierdzenie 4.9), szczególnie dla struktur transwersalnie symplektycznych, i zbadaniu związku bazowego $dd^{\mathcal{J}}$-lematu z surjektywnością odwzorowania Lefschetza (Twierdzenie 4.17). Przykłady z rozdziału szóstego znalazły się we (wspólnej z Czarneckim) pracy [14]. Wszystkie te rezultaty są oryginalne i poszerzają naszą wiedzę w zakresie teorii struktur transwersalnych i ich kohomologii.

Rozprawa jest zasadniczo dobrze napisana, choć wrażliwy czytelnik mógłby zgłosić pewne pretensje do niedbałości w zakresie oznaczeń: symbol i pojawia się w co najmniej czterech różnych znaczeniach (skąd napisy takie jak $ii_v\omega$), T oznacza zarówno wiązkę styczną jak i rozmaitość transwersalną (skąd TT), w tożsamości

$$i_X\omega = i_X d\omega = 0$$

mamy zasadniczo dwa zera w różnych przestrzeniach, itd.

Wydaje się również, że zamknięta 2-forma o maksymalnym rzędzie (zob. Definicja 2.7) jest *symplektyczna* tylko w wymiarze parzystym. Z kolei, szkic dowodu Twierdzenia 2.19 wydaje sie niezrozumiały (jest zresztą zbędny), bo odwołuje się do struktury riemannowskiej, która w definicji bazowego operatora różniczkowego nie występuje. Zresztą lokalna postać takiego operatora D (str. 11) jako operatora na $\Omega^\bullet(M/\mathcal{F})$ jest niejasna, bo napis $\frac{\partial}{\partial y}\omega$ dla formy różniczkowej ω nie ma geometrycznego sensu, a lokalny sens należałoby wyjaśnić. W Propozycji 3.4 powinno być chyba $\wedge^\bullet V^* \otimes \mathbb{C}$ zamiast $\wedge^k V^* \otimes \mathbb{C}$. Te uwagi mają jednak charakter marginalny i rozprawę należy ocenić generalnie pozytywnie.

3. Podsumowanie

Przedstawiona rozprawa doktorska pana mgr. Pawła Raźnego zawiera kilka interesujących rezultatów zawierających rozwiązanie oryginalnych problemów naukowych. Listę takich rezultatów wymieniłem w poprzednim punkcie. Wyniki mają charakter dość techniczny i dotyczą uogólnień pewnych koncepcji i twierdzeń symplektycznej i zespolonej geometrii na przypadek odpowiednich struktur transwersalnych do zadanej foliacji. Uzyskane wyniki oceniam wysoko, choć chyba nie ma wśród nich przełomowych, a zastosowane koncepcje i metody są adaptacją znanych. Autor wydaje się być pod mocnym wpływem rozprawy [8] G. Cavalcanti'ego.

Wyniki te zostały już częściowo opublikowane w dwóch pracach w czasopismach z bazy *Journal Citation Reports* i jednym preprincie. Wykazują one bardzo dużą ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w temacie rozprawy. Brakuje mi trochę bardziej rozbudowanego wstępu. Rozprawa doktorska jest okazją do szerszego przedstawienia motywacji i historii problemu, w przeciwieństwie do niezbędnej zwięzłości publikacji w czasopismach.

Wnioskuję o dopuszczenie pana mgr. Pawła Raźnego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.