

Prof. Dr hab. Grzegorz Łukaszewicz  
Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki  
Uniwersytetu Warszawskiego  
Ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa

OCENA  
rozprawy doktorskiej

pt. *Elliptic and Evolutionary Variational–Hemivariational Inequalities with Applications*  
w przewodzie doktorskim mgr. **Biao Zeng’a**

Rozprawa doktorska, poprzedzona krótkim streszczeniem, składa się z wprowadzenia i następujących publikacji,

(I) B. Zeng, Z.H. Liu, S. Migórski, On Convergence of Solutions to Variational- Hemivariational Inequalities, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* (2018) 69:87, 20 pages, doi: 10.1007/s00033-018-0980-3. IF: 1.687.

(II) B. Zeng, S. Migórski, Variational-Hemivariational Inverse problems for Unilateral Frictional Contact, *Applicable Analysis* (2018), 21 pages, doi: 10.1080-00036- 811.2018.1491037. IF: 0.963.

(III) S. Migórski, B. Zeng, Convergence of Solutions to Inverse Problems for a Class of Variational-Hemivariational Inequalities, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-B* (2018), doi:10.3934-dcdsb.2018172. IF: 0.994.

(IV) Z.H. Liu, S. Migórski, B. Zeng, Existence Results and Optimal Control for a Class of Quasi Mixed Equilibrium Problems Involving the  $(f, g, h)$ -Quasimonotonicity, *Applied Mathematics and Optimization* (2017), doi: 10.1007/s00245- 017-9431-3. IF: 1.236.

(V) B. Zeng, S. Migórski, Evolutionary Subgradient Inclusions with Nonlinear Weakly Continuous Operators and applications, *Computers and Mathematics with Applications* 75 (2018), 89–104. IF: 1.531.

Deklaracje współautorów pozwalają ocenić wkład doktoranta do przedstawionych prac odpowiednio na 40, 75, 75, 50 i 60 procent. Powyższe czasopisma to dobre i liczące się czasopisma matematyczne. Całkowita liczba publikacji autora rozprawy wynosi 11.

Cel rozprawy jest dwoisty. Po pierwsze, danie wkładu do abstrakcyjnej teorii eliptycznych i ewolucyjnych nierówności wariacyjno–hemiwariacyjnych, po drugie, zastosowanie uzyskanych wyników do wybranych zagadnień mechaniki. Oba cele i rezultaty są ciekawe i należą do głównych kierunków badań w dziedzinie rachunku wariacyjnego i jego zastosowań. Każdy z artykułów rozprawy traktuje te dwa aspekty. Wydaje się, że niektóre motywacje podjęcia badań pochodzą z wyzwań stawianych przez zastosowania w

mechanice, głównym celem doktoranta jest jednak eksploracja czekających na głębokie potraktowanie aspektów teoretycznych, związanych przede wszystkim z teorią sterowania optymalnego i teorią nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnych.

Rozprawa nie jest poświęcona jednemu wybranemu zagadnieniu podstawowemu, jej rezultaty można jednak uważać za ściśle powiązane ze sobą, dotyczą one jednego kręgu tematycznego.

Struktura logiczna rozprawy jest klarowna. Autor rozprawy podąża, w zakresie nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnych, za standardowymi procedurami, badając zagadnienie, po pierwsze, poprawności postawienia rozważanych problemów, tzn. istnienia i jednoznaczności rozwiązań, ich ciągłej zależności od zaburzeń danych, a dalej, rozważając zagadnienia stabilności strukturalnej i penalizacji, zagadnienia problemów odwrotnych dla tych ostatnich, a także zagadnienia sterowania optymalnego i mieszane zagadnienia równowagi.

**Zawartość pracy.** Wprowadzenie przedstawia motywację podjęcia badań, których wyniki przedstawione są w rozprawie, główne otrzymane wyniki dotyczące ogólnej teorii oraz konkretne zastosowania w mechanice.

W artykule (I) rozważane jest zagadnienie ewolucyjne dla nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnej (V-H). Autor dowodzi istnienie i jednoznaczność rozwiązania, a także jego ciągłość względem zaburzeń danych zagadnienia, ilustrując otrzymane wyniki na przykładzie ciekawego stacjonarnego zagadnienia przewodnictwa ciepła z wewnętrznymi i brzegowymi więzami typu półprzenikliwości.

W artykule (II) rozważane są zagadnienia odwrotne dla pewnej klasy eliptycznych nierówności (V-H). Po wykazaniu poprawności postawienia samych tych zagadnień, autor dowodzi istnienia rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Zastosowanie tych wyników pokazane jest na przykładzie zagadnienia odwrotnego dla jednostronnego zagadnienia kontaktowego z tarciem w teorii nieliniowej elastyczności.

Artykuł (III) wprowadza penalizację zagadnienia rozważanego w poprzednim artykule. Badane są w nim zagadnienia odwrotne do wyjściowej nierówności oraz jej penalizacji. Pokazane jest istnienie rozwiązań tych zagadnień oraz ściśle relacje między ich optymalnymi rozwiązaniami, zależące w pewnym sensie w sposób ciągły od parametru penalizacji. Rezultaty teoretyczne są zilustrowane na przykładzie pewnego uproszczonego modelu niegładkiego zagadnienia kontaktowego teorii elastyczności.

W artykule (IV) badane są mieszane zagadnienia równowagi. Wprowadzone jest nowe pojęcie quasi-monotoniczności, pozwalające pokazać istnienie rozwiązania dla szerokich klas problemów. Pokazano też istnienie rozwiązania zagadnienia sterowania optymalnego. Wyników są zilustrowane przykładami.

W artykule (V) pokazane jest istnienie rozwiązania ewolucyjnej nierówności różniczkowej pierwszego rzędu. Zastosowano ten wynik do równania Naviera-Stokesa z niemonotonicznymi i wielowartościowymi warunkami brzegowymi typu tarcia.

Bibliografia, do której odwołuje się autor rozprawy zawiera około 80-ciu pozycji.



**Ocena rozprawy.** Rozprawa stoi na wysokim poziomie merytorycznym. Nawiązuje do aktualnych publikacji w zakresie rozważanego nurtu badań niegładkiej i niewypukłej analizy, zarówno teoretycznych, w których rozważa się modele abstrakcyjne jak i publikacji, w których wyniki te są odniesione do zastosowań w mechanice. Rozważana tematyka należy do głównego nurtu badań w obu tych aspektach. Autor rozprawy wykazał w niej bardzo dobrą znajomość przedmiotu podjętych badań, a także dużą biegłość w zakresie stosowanych narzędzi analizy matematycznej. Rozważane zagadnienia są trudne pod względem analitycznym poprzez swoją złożoność. Zostały potraktowane w dogłębny sposób. Imponuje różnorodność użytych metod z repertuaru nieliniowej niegładkiej analizy funkcjonalnej. Rozprawa ma klarowną, logiczną strukturę, jest bardzo starannie przygotowana.

Za najciekawsze uważam wyniki zawarte w artykułach (II–IV), w szczególności, w artykule (IV), dotyczącym zagadnień równowagi i sterowania optymalnego.

Otrzymane rezultaty mogą stanowić początkową fazę bogatego programu naukowego.

**Wniosek końcowy.** Przedstawiona rozprawa doktorska mgr. Biao Zenga stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w zakresie rachunku wariacyjnego i jego zastosowań w mechanice. Doktorant wykazał w niej dogłębną znajomość przedmiotu badań i swobodę w użyciu jej metod badawczych. Pokazał, że jest w pełni świadomy tego, co jest ważne i co warto badać. Rozprawa ma logiczną i klarowną strukturę, jest napisana jasnym językiem.

W mojej ocenie przedstawiona rozprawa spełnia wszystkie wymogi stawiane rozprawie doktorskiej (zgodnie z wymaganiami zawartymi w paragrafie 6 ust. 3, 4, 5 i 6 Rozporządzenia Ministra nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 30 października 2015 r. w sprawie szczegółowego trybu i warunków przeprowadzania czynności w przewodach doktorskich, etc.) Tym samym wnoszę o dopuszczenie mgr. Biao Zenga do dalszych etapów postępowania o nadanie stopnia naukowego doktora.

Uważam, że przedstawiona rozprawa mgr. Biao Zenga jest wyróżniającą się rozprawą doktorską i tym samym wnioskuję do Rady Wydziału Matematyki i Informatyki UJ o jej wyróżnienie.

Grzegorz Łukaszewicz

Warszawa, dn. 7 stycznia, 2019 r.

*Grzegorz Łukaszewicz*