Prof. dr hab. Jan Cholewa
Instytut Matematyki
Uniwersytet Śląski
Bankowa 14, 40-007 Katowice

tel./fax +48 32 2 582 976
e-mail: jan.cholewa@us.edu.pl
http://www.math.us.edu.pl/zrr/jcholewa/index.html

Katowice, 17.12.2018 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej
mgr. Biao Zenga
„Elliptic and evolutionary
variational-hemivariational inequalities
with applications"

Rozprawę doktorską mgr. B. Zenga tworzy zbiór pięciu spójnych tematycznie prac:

[1] On convergence of solutions to variational-hemivariational inequalities,
[2] Variational-hemivariational inverse problems for unilateral frictional contact,
[3] Convergence of solutions to inverse problems for a class of variational-hemivariational inequalities,
[4] Existence results and optimal control for a class of quasi mixed equilibrium problems involving the (f, g, h)-quasimonotonicity,
[5] Evolutionary subgradient inclusions with nonlinear weakly continuous operators and applications.

Prace te zostały upowszechnione w czasopismach obecnych na liście Journal Citation Reports, takich jak Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Applicable Analysis, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, Applied Mathematics and Optimization, Computers and Mathematics with Applications. Artykuły [2] oraz [4] są przy tym obecnie dostępne w formie publikacji online.

Składające się na rozprawę prace [1]-[5] mieszczą się w nurcie badań prowadzonych wspólnie z promotorem rozprawy prof. S. Migórskim; przy tym dwie z nich, [1] oraz [4], powstały w ramach współpracy prowadzonej także z prof. Z. Liu z Quangxi University for Nationalities w Nanning. Załączone do rozprawy oświadczenia, przedstawione odrębnie przez prof. Z. Liu oraz prof. S. Migórskiego, potwierdzają indywidualny wkład mgr. B. Zenga w te publikacje.

Rozprawa ujmuje wyniki badań prowadzonych w zakresie nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnych i inkluzji ewolucyjnych.

Praca [1] zestawia warunki dotyczące podzbiorów K, K_ρ refleksywnej przestrzeni Banacha X, operatorów $A, A_\rho : X \to X^*$ oraz funkcji $\varphi : K \times K \to \mathbb{R}$, $\varphi_\rho : K_\rho \times K_\rho \to \mathbb{R}$, $j, j_\rho : X \to \mathbb{R}$, $f, f_\rho \in X^*$, które są wystarczające dla istnienia przy dowolnym $\rho > 0$ jedynego $u_\rho \in K_\rho$ takiego, że

$$(1) \quad \langle A_\rho u_\rho - f_\rho, v_\rho - u_\rho\rangle + \varphi_\rho(u_\rho, v_\rho) - \varphi_\rho(u_\rho, u_\rho) + j_\rho^0(u_\rho; v_\rho - u_\rho) \geqslant 0, \quad v_\rho \in K_\rho,$$

a równocześnie zapewniają, iż u_ρ zbiega w X gdy $\rho \to 0$ do $u \in K$ będącego rozwiązaniem

$$(2) \qquad \langle Au - f, v - u\rangle + \varphi(u, v) - \varphi(u, u) + j^0(u; v - u) \geqslant 0, \quad v \in K.$$

gdzie w szczególności $\varphi(u, \cdot)$ jest wypukła, j lokalnie lipschitzowska, a j^0 jest pochodną kierunkową Clarka j. Bazując przy tym na warunkach dla istnienia i jednoznaczości rozwiązania z wcześniejszej pracy S. Migórskiego wspólnej z A. Ochal oraz M. Sofonea pokazano również, że gdy $f \in C(\mathbb{R}_+; X^*)$ to istnieje jedyne rozwiązanie $u \in C(\mathbb{R}_+; K)$ nieautonomicznego odpowiednika (2). Podobny wynik uzyskano dla nieautonomicznej wersji (1) dowodząc także, iż dla $t \in \mathbb{R}_+$ stosowny podciąg $u_\rho(t)$ zbiega w X do $u(t)$ gdy $\rho \to 0$.

W pracy [2] sformułowane są warunki dla A, φ, j, f, które są wystarczające, by przy dowolnym p z rozważanej tu unormowanej przestrzeni parametrów $\mathcal{P}$ istniało jedyne $u = u(p) \in K$ takie, że

$$(3) \quad \langle A(p, u) - f(p), v - u\rangle + \varphi(p, u, v) - \varphi(p, u, u) + j^0(p, u; v - u) \geqslant 0, \quad v \in K.$$

Elegancki dowód nawiązuje ideowo do wspomnianej powyżej pracy S. Migórskiego wspólnej z A. Ochal oraz M. Sofonea; przy tym wykorzystanie innego niż w tej pracy twierdzenia o surjekcji pseudomonotonicznej perturbacji operatora maksymalnie monotonicznego pozwoliło pominąć jeden z warunków nakładanych tam na A. Przy dodatkowych założeniach pokazano następnie w [2], iż rozwiązania zachowują się w sposób ciągły względem parametru tak, iż $u(p_n)$ jest w X słabo zbieżny do $u(p)$ gdy $p_n \to p$ w $\mathcal{P}$, a jeśli $f : \mathcal{P} \to X^*$ oraz $A(\cdot, u) : \mathcal{P} \to X^*$ są funkcjami lipschitzowskimi, to

$$(4) \qquad \|u(p_1) - u(p_2)\|_X \leqslant \frac{L_A + \beta_\phi + \beta_j + L_f}{\alpha_A - \alpha_\phi - \alpha_j}\|p_1 - p_2\|_{\mathcal{P}}, \quad p_1, p_2 \in \mathcal{P},$$

gdzie stałe po prawej stronie (4) wywodzą się z warunków nałożonych na A, φ, j, f. Udowodniono w szczególności dalej, iż gdy $\mathcal{P}_{ad}$ jest zwartym podzbiorem $\mathcal{P}$, a F jest funkcjonałem półciągłym z dołu na $\mathcal{P}_{ad} \times K$, to daje się zidentyfikować w $\mathcal{P}_{ad}$ parametr p^* taki, iż

$$(5) \qquad F(p^*, u(p^*)) = \min\{F(p, u(p)) \mid p \in \mathcal{P}_{ad}\}.$$

W pracy [3] rozważany jest operator $P : \mathcal{P} \times X \to X^*$ taki, że dla dowolnie obranego p ze zbioru parametrów $P(p, \cdot)$ jest ograniczony, demiciągły i monotoniczny oraz $K = \{x \in X \mid P(p, x) = 0\}$. Pokazano tu, iż dla każdego $\lambda > 0$ oraz $p \in \mathcal{P}$ istnieje jedyne $u_\lambda = u_\lambda(p) \in X$ takie, że

$$
\begin{aligned}
(6) \qquad & \langle A(p, u_\lambda) - f(p), v - u_\lambda \rangle + \frac{1}{\lambda}\langle P(p, u_\lambda), v - u_\lambda \rangle \\
& \quad + \varphi(p, u_\lambda, v) - \varphi(p, u_\lambda, u_\lambda) + j^0(p, u_\lambda; v - u_\lambda) \geqslant 0, \qquad v \in X,
\end{aligned}
$$

a ponadto $u_\lambda(p)$ zbiega w X gdy $\lambda \to 0$ do $u(p) \in K$ spełniającego (3), co nawiązuje do rozwijanej wcześniej przez S. Migórskiego wspólnie z A. Ochal oraz M. Sofonea *penalty method.* W kontekście (6), po uzyskaniu efektu ciągłej zależności rozwiązania od parametru, badany jest następnie analogon (5), dla którego uzyskano istnienie rozwiązania $p^*_\lambda \in \mathcal{P}_{ad}$; przy tym na podciągu $(p^*_\lambda, u^*_\lambda)$ z zanikającym λ pokazano, iż $p^*_\lambda \to p^*$ w $\mathcal{P}$ oraz $u^*_\lambda \to u^*$ w X, gdzie p^* spełnia (5) z $u^* = u(p^*)$ będącym jedynym rozwiązaniem (3).

W pracy [4], zakładając najpierw iż wypukły podzbiór K przestrzeni Banacha jest zwarty, a odwzorowanie wielowartościowe F jest mocno-słabo* domknięte jak również quasi*-zwarte, pokazane jest istnienie $x \in K$ oraz $x^* \in F(x)$, dla których

$$\langle x^*, f(x, y)\rangle + g(x, y) \geqslant h(y, x), \;\; y \in K,$$

co przy założeniu maksymalnej monotoniczności h implikuje z kolei istnienie $x \in \mathcal{D}(g) \cap \mathcal{D}(h)$ oraz $x^* \in F(x)$ takich, że

$$\langle x^*, f(x, y)\rangle + g(x, y) + h(x, y) \geqslant 0, \;\; y \in K.$$

Gdy K jest domknięty i ograniczony tego typu rezultat egzystencjalny otrzymuje się w przestrzeni refleksywnej, modyfikując przyjmowane uprzednio założenia dotyczące f, g, h, a przy tym zakładając (f, g, h)-quasimonotoniczność F. Gdy K nie jest ograniczony, taki wynik otrzymuje się przyjmując dodatkowo, iż dla każdego $x \in K$ leżącego poza pewną kulą istnieje w K element y o normie mniejszej od normy x, dla którego

$$\sup_{x^* \in F(x)} \langle x^*, f(x, y)\rangle + g(x, y) + h(x, y) \leqslant 0.$$

Uzyskane w [4] wyniki egzystencjalne dotyczą ponadto problemu sterowania optymalnego rozważanego z $h = 0$, gdzie przyjmuje się z kolei założenie stabilnej $(f, g, 0)$-pseudomonotoniczności F.

W pracy [5] udowodnione jest twierdzenie o surjekcji, które stosuje się do otrzymania ciągów przybliżających Rothego w prowadzonych następnie rozważaniach dotyczących inkluzji ewolucyjnych z operatorem subróżniczki oraz słabo ciągłym operatorem A

$$(7) \qquad u'(t) + Au(t) + \gamma^* \partial J(\gamma u(t)) \ni f(t) \;\; \text{dla p.w. } t \in (0, T).$$

Wykorzystując oszacowania ciągów przybliżających oraz przechodząc do granicy dowodzi się istnienia spełniającego warunek $u(0) = u_0$ rozwiązania (7). Po wzmocnieniu założeń przyjmowanych w części egzystencjalnej uzyskuje się jednoznaczność rozwiązania, a także dodatkowe twierdzenie dotyczące zbieżności ciągów przybliżających.

Poza przedstawionymi powyżej wynikami teoretycznymi w rozprawie zawarte są także przykłady zastosowań. Dotyczą one zagadnienia półprzepuszczalności, modelu kontaktowego, a także równania Naviera-Stokesa z warunkiem brzegowym opisującym zjawisko tarcia.

W perspektywie znacznej skali trudności prowadzonych badań warto podkreślić elegancję prezentacji wyników oraz prowadzenia wywodów. Widać tu zarówno swobodę poruszania się w złożonej technicznie i pojęciowo strukturze przyjmowanych założeń, jak również dużą biegłość posługiwania się metodami analizy oraz szeroką znajomość literatury z zakresu prowadzonych badań.

Całość rozprawy pozostaje na wysokim poziomie naukowym. Współpracując z uznanymi specjalistami mgr B. Zeng w znaczący sposób rozwinął umiejętności badawcze oraz specjalistyczną wiedzę matematyczną umożliwiające prowadzenie z sukcesem pracy naukowej.

Stwierdzam z pełnym przekonaniem, że spełnione zostały wymogi ustawowe i wnioskuję o dopuszczenie mgr. B. Zenga do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Cholewa

Jan Cholewa