„Projekcje wielowartościowe Bishopa" - streszczenie

Niech M będzie zespoloną podrozmaitością rozmaitości Steina X. Wiadomo jest, że $\mathcal{O}(X)|_M = \mathcal{O}(M)$ (patrz [6]) tzn. każda funkcja holomorficzna na M rozszarza się holomorficznie na całe X. W [2] E. Bishop przestawił dowód powyższego rezultatu, który nie korzysta z metod snopowych, natomiast wykorzystuje analityczne wielościany (analytic polyhedrons). Kluczową częścią dowodu jest wykazanie, że dla każdego relatywnie zwartego obszaru $U \subset X$ takiego, że $U \cap M \neq \varnothing$ mamy, że $\mathcal{O}(U)|_{U\cap M} = \mathcal{O}(M)_{U\cap M}$. Na końcu tego dowodu autor wspomniał, że dowód tego faktu może być udowodniny przy użyciu alternatywnej metody tzw. projekcji wielowartościowych. Celem rozprawy jest kontynuacja realizacji tego zadania (w pracy [3] zostały już otrzymane pewne częsciowe wyniki).

W rozprawie zostaną udowodnione następujące twierdzenia.

Theorem 1. *Istnieje system projecji wielowartościowych $U \longrightarrow M$. W szczególności, istnieje ciągły liniowy operator rozszerzający $L : \mathcal{O}(M) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$.*

Theorem 2. *Załóżmy, że $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(M)$ jest lokalnie niemal jednostajnie ograniczona. Istnieje wtedy $\mathcal{F}$-rozszerzenie $\Pi = (\Delta_{s,j})_{(s,j)\in\{1,\dots,d\}\times\mathbb{N}}$, gdzie $d := \dim M$. W konsekwencji, istnieje ciągły operator rozszerzający $L_\Pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}(X)$.*

Theorem 3. *Załóżmy, że $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}(M)$ jest przestrzenią Hilberta taką, że kula jednostkowa $B := \{f \in \mathcal{H} : \|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$ jest lokalnie niemal jedostajnie ograniczona i zbieżność w $\mathcal{H}$ implikuje zbieżność w topologii niemal jednostajnej zbieżności w M. Wtedy istnieje ciągły liniowy operator rozszerzający $L : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}(X)$. W szczególności, istnieje ciągły operator rozszerzający $L : L^2_h(M) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$.*

Użyte symbole

$\mathbb{C}$	–	zbiór liczb zespolonych,
$\mathbb{N}$	–	zbiór liczb naturalnych,
$\mathcal{O}(X)$	–	zbiór liczb holomorficznych na X,
$L^2_h(X)$	–	$\{f \in \mathcal{O}(X) : \int_X \|f\|^2 < \infty\}$.

Literatura

[1] R. Arens, *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J. 5 (1958), 169-182.

[2] E. Bishop, *Some global problems in the theory of functions of several complex variables*, Amer. J. Math. 83 (1961), 479-498.

[3] K. Drzyzga, *A remark on Bishop's multivalued projections*, Univ. Iag. Acta Math. 53 (2016) (to appear).

[4] R. Gunning, H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, Engelewood Cliffs, 1965.

[5] S. Łojasiewicz, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser, 1991.

[6] H. Whitney, *Complex Analytic Varieties*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

Kamil Drzyzga

"Bishop's multivalued projections" - abstract

Let M be a complex submanifold of a Stein manifold X. It is known (cf. e.g. [4], Chapter VIII, Section A, Theorem 18) that $\mathcal{O}(X)|_M = \mathcal{O}(M)$, i.e. each function holomorphic on M extends holomorphically to X. In [2] E. Bishop proposed a proof of the above result based on the use of special analytic polyhedra (without sheaves methods). The central part of Bishop's proof is to show that for every relatively compact domain $U \subset X$ with $U \cap M \neq \varnothing$ we have $\mathcal{O}(U)|_{U\cap M} = \mathcal{O}(M)|_{U\cap M}$. At the end of his proof E. Bishop suggested that an alternative proof may be performed in the language of holomorphic multivalued projections. The aim of the thesis is to continue the realization of this idea (the partial results are proved in [3]).

In the thesis the following theorems will be proved:

Theorem 1. *There exists a system Π of multivalued holomorphic projections $U \longrightarrow M$. Consequently, there exists a linear continuous extension operator $L_\Pi : \mathcal{O}(M) \longrightarrow \mathcal{O}(U)$.*

Theorem 2. *Assume that $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(M)$ is locally uniformly bounded. Then there exists an $\mathcal{F}$-extension $\Pi = (\Delta_{s,j})_{(s,j)\in\{1,\dots,d\}\times\mathbb{N}}$ with $d := \dim M$. Consequently, there exists a continuous extension operator $L_\Pi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{O}(X)$.*

Theorem 3. *Assume that $\mathcal{H} \subset \mathcal{O}(M)$ is a Hilbert space such that unit ball $B := \{f \in \mathcal{H} : \|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1\}$ is locally uniformly bounded and the convergence in the sense of $\mathcal{H}$ implies the locally uniform convergence in M. Then there exists a linear continuous extension operator $L : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{O}(X)$. In particular, there exists a linear continuous extension operator $L : L^2_h(M) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$.*

Used symbols

$\mathbb{C}$	–	the set of complex numbers,
$\mathbb{N}$	–	the set of natural numbers,
$\mathcal{O}(X)$	–	the set of holomorphic funtions on X,
$L^2_h(X)$	–	$\{f \in \mathcal{O}(X) : \int_X \lvert f\rvert^2 < \infty\}$.

References

[1] R. Arens, *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J. 5 (1958), 169-182.

[2] E. Bishop, *Some global problems in the theory of functions of several complex variables*, Amer. J. Math. 83 (1961), 479-498.

[3] K. Drzyzga, *A remark on Bishop's multivalued projections*, Univ. Iag. Acta Math. 53 (2016) (to appear).

[4] R. Gunning, H. Rossi, *Analytic Functions of Several Complex Variables*, Prentice-Hall, Engelewood Cliffs, 1965.

[5] S. Lojasiewicz, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser, 1991.

[6] H. Whitney, *Complex Analytic Varieties*, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

Kamil Drzyzga