Streszczenie pracy doktorskiej "Klasy Cegrella funkcji m-subharmonicznych"

Praca doktorska dotyczy zespolonego operatora hesjanowego zdefiniowanego dla funkcji m-subharmonicznych z klas Cegrella w obszarach m-hiperwypukłych Ω w $\mathbb{C}^n$. Wiadomo, że zespolony operator hesjanowy nie może być poprawnie zdefiniowany dla wszystkich funkcji m-subharmonicznych. Wykazano, że może on być poprawnie określony na pewnym podzbiorze $\mathcal{E}_m(\Omega)$ nie-dodatnich funkcji m-subharmonicznych, i że klasa $\mathcal{E}_m(\Omega)$ może być w pewnym sensie uważana za naturalną dziedzinę dla tego operatora.

Dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{F}_m(\Omega) \subset \mathcal{E}_m(\Omega)$ można zdefiniować w naturalny sposób miarę brzegową μ_u określoną na $\partial\Omega$. W pracy doktorskiej przedstawiono konstrukcję miar brzegowych oraz pewne ich własności. W szczególności udowodniono, że istnieje podzbiór $S \subset \partial\Omega$ taki, że $\operatorname{supp}\mu_u = S$ dla dowolnej funkcji $u \in \mathcal{F}_m(\Omega), u \neq 0$. Zdefiniowano również wartości brzegowe dla ograniczonych funkcji m-subharmonicznych względem miar brzegowych μ_u. Wykazano, że jeżeli $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ i $h \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, to istnieje funkcja $h^u \in L^\infty(\partial\Omega, \mu_u)$ taka, że $\lim_{j\to\infty} hH_m(u^j) = h^u d\mu_u$. Wartości funkcji h^u formalnie zależą of funkcji h i u. Jednak, gdy h jest ograniczoną funkcją m-subharmoniczną zdefiniowaną na pewnym większym obszarze m-hyperwypukłym $W \supset \bar{\Omega}$, to $h^u = h_{|\partial\Omega}$ prawie wszędzie względem miary μ_u dla dowolnej funkcji u z klasy $\mathcal{F}^a_m(\Omega)$ - podklasy funkcji z $\mathcal{F}_m(\Omega)$, dla których miara hesjanowa znika na zbiorach m-pluripolarnych w Ω.

W pracy doktorskiej zdefiniowano również nową klasę Cegrella $\mathcal{N}_m(\Omega)$ zawartą w klasie $\mathcal{E}_m(\Omega)$ i zawierającą funkcje z klasy $\mathcal{F}_m(\Omega)$. W pewnym sensie $\mathcal{N}_m(\Omega)$ jest zbiorem wszystkich funkcji z klasy $\mathcal{E}_m(\Omega)$, których wartości brzegowe są równe zero. Podano również pełną charakteryzację tych funkcji z klasy $\mathcal{E}_m(\Omega)$, które należą do $\mathcal{N}_m(\Omega)$. Co więcej wykazano, że funkcja $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy należy ona do klasy $\mathcal{N}_m(\Omega)$ jej miara hesjanowa $H_m(u)$ jest skończona. W pracy udowodniono również problem Dirichleta, twierdzenie o podrozwiązaniu i twierdzenie o stabilności w klasie $\mathcal{N}_m(\Omega)$.

W rozdziale czwartym pracy doktorskiej zdefiniowano przestrzeń wektorową funkcji delta m-subharmonicznych. Niech $\mathcal{K}$ będzie stożkiem nie-dodatnich funkcji m-subharmonicznych. Wtedy zbiór $\delta\mathcal{K} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$ jest przestrzenią wektorową z naturalnie zdefiniowanymi operacjami dodawania i mnożenia przez liczby rzeczywiste. Wykazano, że przestrzeń wektorowa $\delta\mathcal{E}_{p,m}$ z odpowiednio zdefiniowaną quasi-normą jest quasi przestrzenią Banach, gdy $p \neq 1$ oraz jest przestrzenią Banacha gdy $p = 1$, gdzie $\mathcal{E}_{p,m}$ jest podklasą $\mathcal{E}_m$, w której funkcje m-subharmoniczne mają skończoną m-plurizespoloną p-energię. Wyjaśniono również dlaczego $\delta\mathcal{E}_{p,m}$, dla $p \neq 1$ nie może być przestrzenią Banacha.

W ostatnim rozdziale pracy doktorskiej rozważane są radialne funkcje m-subharmoniczne zdefiniowane w kuli jednostkowej. Badana jest ich wypukłość i związek z rozwiązaniami zespolonego równania hesjanowego. Ponadto wykazano, że uporządkowana przestrzeń wektorowa funkcji delta radialnych i m-subharmonicznych jest przestrzenią Riesza.

Summary of Ph.D. Thesis "On Cegrell classes for m-subharmonic functions"

In this thesis, we studied the complex Hessian operator in an m-hyperconvex domain Ω in $\mathbb{C}^n$, especially for the Cegrell classes of m-subharmonic functions. It is known that the complex Hessian operator can not be extended to the whole class of m-subharmonic functions. We showed that the complex Hessian operator is well-defined on a certain subset $\mathcal{E}_m(\Omega)$ of non-positive m-subharmonic functions and $\mathcal{E}_m(\Omega)$ is the natural domain of definition of the complex Hessian operator.

For each function $u \in \mathcal{F}_m(\Omega) \subset \mathcal{E}_m(\Omega)$, there is a natural boundary measure μ_u defined on $\partial\Omega$. We constructed these measures and showed some of their properties. We showed that there is a set $S \subset \partial\Omega$ such that $\text{supp}\mu_u = S$ for each $u \in \mathcal{F}_m(\Omega), u \neq 0$. We define boundary values of bounded m-subharmonic functions with respect to the measures μ_u. If $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ and $h \in SH_m(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, there is a function $h^u \in L^\infty(\partial\Omega, \mu_u)$ such that $\lim_{j\to\infty} hH_m(u^j) = h^u d\mu_u$. The function h^u formally depends on both h and u. However, if h is a bounded m-subharmonic function on some strictly larger m-hyperconvex domain $W \supset \bar{\Omega}$, then $h^u = h_{|\partial\Omega}$ almost everywhere with respect to μ_u for each $u \in \mathcal{F}^a_m(\Omega)$-the subclass of functions in $\mathcal{F}_m(\Omega)$ whose Hessian measures put no mass on m-polar subsets of Ω.

We introduced a new subclass $\mathcal{N}_m(\Omega)$ of the class $\mathcal{E}_m(\Omega)$ which interpolates between the classes $\mathcal{F}_m(\Omega)$ and $\mathcal{E}_m(\Omega)$. In a certain sense $\mathcal{N}_m(\Omega)$ is the set of all functions in $\mathcal{E}_m(\Omega)$ having zero boundary value. We gave a complete characterization of those functions in $\mathcal{E}_m(\Omega)$ which are also in $\mathcal{N}_m(\Omega)$. Furthermore, we showed that a function $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ if and only if it belongs to $\mathcal{N}_m(\Omega)$ and has bounded total Hessian mass. We also generalized the Dirichlet problem, subsolution theorem and stability theorem to this class.

The vector space of delta m-subharmonic functions has been introduced. Let $\mathcal{K}$ be a cone of negative m-subharmonic functions. We define $\delta\mathcal{K} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$ to be a vector space under pointwise addition and usual scalar multiplication. We showed that $\delta\mathcal{E}_{p,m}$ along with a suitable quasi-norm is a quasi-Banach space if $p \neq 1$ and a Banach space if $p = 1$, where $\mathcal{E}_{p,m}$ is a subclass of $\mathcal{E}_m$ whose elements have finite m-pluricomplex p-energy. We also explained why $\delta\mathcal{E}_{p,m}$, for $p \neq 1$ can not be a Banach space.

In the last part, we considered radially symmetric m-subharmonic functions on the unit ball. We studied their convexity and their relation with a solution of the complex Hessian equations. Furthermore, we considered the ordered vector space of delta radially symmetric m-subharmonic functions which is a Riesz space.