dr hab. Michał Jasiczak
Zakład Analizy Matematycznej
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

Poznań, 25 czerwca 2018

RECENZJA ROZPRAWY DOKTORSKIEJ "ON CEGRELL CLASSES FOR m-SUBHARMONIC FUNCTIONS" PANA MGRA VAN THIEN NGUYENA

Pan mgr Van Thien Nguyen przedstawił rozprawę doktorską zatytułowaną "On Cegrell classes for m-subharmonic functions". Praca ta powstała pod opieką Pana dr hab. Rafała Czyża. **Jest to bardzo dobra rozprawa doktorska. Wnioskuję w związku z tym o jej wyróżnienie.** Poniżej omówię wyniki uzyskane przez Pana mgra Nguyena. Przedstawię także moją ich ocenę.

Recenzowana praca liczy 135 stron i składa się z pięciu rozdziałów podzielonych na podrozdziały. Już pobieżna lektura pracy prowdzi do wniosku, że jest to poważna rozprawa. **Waga i ilość uzyskanych wyników, może trochę tylko rozwiniętych, wystarczyłaby na dwie dobre prace doktorskie.** Warto podkreślić, że w momencie pisania rozprawy Pan mgr Nguyen był autorem pięciu artykułów cytowanych w recenzowanej pracy. Dwa z nich wtedy były już opublikowane. Jeden w *Ann. Polon. Math.* [14], drugi w *Complex Var. Elliptic Equ.* [15]. Jest to więc także dobry dorobek jak na naukowca przed doktoratem.

Teoria pluirpotencjału, którą zajmuje się Pan mgr Nguyen jest niewątpliwie bardzo aktualna i intensywnie rozwijana. Matematycy z ośrodka krakowskiego mogą poszczycić się wieloma ważnymi dla tej teorii wynikami. Prawdopodobnie początek całej teorii dała fundamentalna praca E. Bedforda i B. A. Taylora opublikowana w *Acta Mathematica* w 1982, [2], chociaż równanie Monge-Ampéra badane było już wcześniej. Teoria pluripotencjału przyciągała od tego czasu uwagę wielu wybitnych matematyków. Za podsumowanie pierwszego etapu jej rozwoju można uznać monografię autorstwa M. Klimka zatytułowaną *Pluripotential Theory,* [12]. W momencie powstania tej bardzo ważnej książki zupełnie podstawowy problem naturalnej dziedziny zespolonego operatora Monge-Ampéra $(dd^c)^n$ nie był jeszcze rozstrzygnięty.

Problemowi temu poświęcono wiele uwagi. Naturalne klasy, na których zdefiniowany jest operator $(dd^c)^n$ zostały zdefiniowane przez U. Cegrella w pracy, która także ukazała się w *Acta Mathematica* [6]. Fakty te są oczywiście doskonale znane specjalistom. Warto jednak je przytoczyć, aby pokazać jakiej klasy matematyką zajmuje się w swojej rozprawie Pan mgr Nguyen. Czytając monografię autorstwa M. Klimka nie sposób nie zauważyć jak duży postęp dokonał się w tej dziedzinie w minionych latach. **Co należy podkreślić rozprawa Pana mgr Nguyena jest moim zdaniem ważnym elementem tego postępu.**

Pierwszy rozdział rozprawy zatytułowany jest *Cegrell classes.* Ma on charakter wprowadzający. Autor definiuje w nim funkcje m-sbharmoniczne i związane z nimi klasy Cegrella. Sama definicja funkcji m-subharmonicznych jest zupełnie naturalna z punktu widzenia teorii prądów. Funkcje te są zawsze subharmoniczne, wtedy, gdy $n = m$ otrzymujemy fundamentalną dla analizy zespolonej klasę funkcji plurisubharmonicznych. Teorię zespolonych Hesjanów rozwija się analogicznie do teorii zespolonego operatora Monge-Ampéra. W szczególności Błocki [3] pokazał, że iloczyn zewnętrzny prądów związanych z lokalnie ograniczonymi funkcjami m-subharmonicznymi jest dobrze zdefiniowany. Dalej podobnie jak ma to miejsce w teorii pluripotencjału definiuje się odpowiednie pojemności, pojęcie quasi-ciągłości i otrzymuje odpowiedniki znanych w teorii pluripotencjału wyników takich jak na przykład *Comparisan principle.* Podstawowym obiektem zdefiniowanym w rozdziale pierwszym są oczywiście klasy Cegrella funkcji m-subharmonicznych na obszarach m-hiperwypukłych. Wyniki zawarte w rodziale pierwszym pochodzą przede wszystkim z rozprawy doktorskiej H. C. Lu zatytułowanej *Complex Hessian equations* i powstałej w roku 2012. Bardzo dobrze, że Autor zawarł je w swojej rozprawie. Pozwalają one bowiem umieścić twierdzenia mgra Nguyena w właściwym kontekście, często są wręcz niezbędne dla ich zrozumienia. Warto jednak podkreślić, że także tutaj znaleźć można wyniki mgra Nguyena. Udowadnia On mianowicie interesującą charakteryzację klas $\mathcal{F}_m(\Omega)$ i $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$ w terminach wcześniej wprowadzonej pojemności $\mathrm{cap}_{m,\Omega}$.

Rozdział drugi poświęcony jest maksymalnym funkcjom m-subharmonicznym i nowej klasie funkcji $\mathcal{N}_m(\Omega)$, która jest zawarta między klasami $\mathcal{F}_m(\Omega)$ i $\mathcal{E}_m(\Omega)$. Pojęcie maksymalnej funkcji plurisubharmonicznej prowadzi do zespolonego równania Monge-Ampéra [4], [10]. Jest więc zupełnie naturalnym badanie pojęcia maksymalnej funkcji m-subharmonicznej. Autor podaje charakteryzację takich funkcji (Lemma 2.1.2). Jest to uogólnienie wyników

Sadullaeva [16]. Uogólnia także wyniki Cegrella [7] dla funkcji plurisubharmonicznych na funkcje m-subharmoniczne (Theorem 2.1.5). Ostatecznie na obszarze m-hiperwypukłym funkcja $u \in \mathcal{E}_m(\Omega)$ okazuje się być maksymalna wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi odpowiednie równanie hesjanowe (Corollary 2.1.6).

W rodziale drugim wprowadzona jest także nowa klasa funkcji m-subharmonicznych oznaczana w pracy przez $\mathcal{N}_m(\Omega)$. Funkcje te mają zerowe wartości brzegowe. Autor w pełni charakteryzuje funkcje należące do tej klasy (Theorem 2.3.6). Mianowicie funkcja $u \in \mathcal{E}_m(\Omega)$ należy do klasy $\mathcal{N}_m(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u \geqslant v$, gdzie $v = \sum_{j=1}^{\infty} v_j$ i funkcje v_j należą do klasy Cegrella $\mathcal{F}_m(\Omega)$. W pracy rozwiązany jest także problem Dirichleta dla nieujemnych miar μ znikających na zbiorach m-polarnych takich, że $\int_\Omega(-\varphi)d\mu < \infty$ dla pewnej ujemnej funkcji m-subharmonicznej (Theorem 2.4.9). Rozwiązanie równania $H_m(u) = \mu$ należy właśnie do klasy $\mathcal{N}_m(\Omega)$. Dowód opiera się o przytoczone poprzednio wyniki Lu. **Uważam, że już tylko ta część pracy wystarcza, aby nadać Panu mgr Van Thien Nguyenowi stopień doktora nauk matematycznych.** Bardzo podobało mi się twierdzenie 2.5.3 i jego dowód. Uogólnia ono tak zwany *subsolution theorem* udowodnione przez N. C. Nguyena [13]. Pan mgr Van Thien Nguyen demonstruje dużą biegłość w dziedzinie, którą się zajmuje. Pewną wadą dowodu jest sposób przywoływania wyników, z których korzysta. Uważam, że praca by zyskała, gdyby wykorzystywane twierdzenia V. V. Hunga i N. V. Phu [8] zostały przytoczone i omówione w całości.

W rodziale trzecim podana jest konstrukcja hesjanowych miar brzegowych. Niech mianowicie $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$. Wówczas m-Hesjan $H_m(u^j)$, gdzie ciąg u^j jest odpowiednio zdefiniowanym ciągiem funkcji m-subharmonicznych odwzwierciedlającym geometrię m-hiperwypukłego obszaru Ω, zbiega $*$-słabo (Autor pisze słabo) do pewnej miary μ_u określonych na brzegu obszaru (Theorem 3.1.1). Miara ta jest wykorzystywana dalej do określenia wartości brzegowych dla każdej ograniczonej funkcji m-subharmonicznej. Podana definicja jest bardzo naturalna i pokrywa się ze zwykłymi wartościami brzegowymi dla ograniczonych funkcji m-subharmonicznych określonych na większych obszarach (Theorem 3.3.2). **Ta część pracy wydaje mi się szczególnie interesująca.** Ma ona związek z teorią miary i jest motywowana znanymi i klasycznymi wynikami z analizy zespolonej (przestrzenie Hardy'ego) i liniowych eliptycznych równań różniczkowych. **Także tutaj Pan mgr Nguyen pokazuje doskonałą wręcz znajomosc tematyki, którą się zajmuje.**

Nie mam wątpliwości, że udowodnione przez Niego wyniki staną się klasyczną częścią teorii pluripotencjału.

Klasy Cegrella nie są oczywiście przestrzeniami liniowymi. Naturalne jest w związku z tym badanie przestrzeni wektorowych generowanych przez te klasy. Warto podkreślić, że przestrzeń funkcji delta-plurisubharmonicznych była już badana przez Cegrella [5] i Kiselmana [11]. Wyniki zawarte w tej części pracy są naturalną kontynuacją twierdzeń udowodnionych przez Åhaga i Czyża [1]. W szczególności jest pokazane, że przestrzeń $\delta\mathcal{E}_{p,m}$ z odpowiednio zdefiniowanym porządkiem jest przestrzenią Riesza i jest σ-zupełna w sensie Dedekinda (Theorem 4.1.8). Z quasi-normą określoną za pomocą m-plurizespolonej m-energii przestrzeń ta okazuje się być przestrzenią quasi-Banacha ($p \neq 1$) i Banacha dla $p = 1$ (Theorem 4.2.7). W rozdziale trzecim Autor bada także własności stożków $\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$ i $\mathcal{M}_{p,m}(\Omega)$ w odpowiednich przestrzeniach ($\delta\mathcal{E}_{p,m}(\Omega)$ i $\delta\mathcal{M}_{p,m}(\Omega)$ – klasa $\mathcal{M}_{p,m}$ to klasa miar, które są m-Hesjanami funkcji z klasy $\mathcal{E}_{p,m}$. Ciekawe wydaje mi się Twierdzenie 4.3.6, w którym jest między innymi pokazane, że przestrzeń $\delta\mathcal{E}_{p,m}$ jest zawarta w przestrzeni dualnej do $\delta\mathcal{M}_{p,m}$. Dostrzegam także pewne wady pracy w tej części. Na stronie Autor pisze: *It can be shown that* $\|\cdot\|_c$ *is the largest norm on* X.... Fakt ten powinien być albo wykazany, albo podana do niego referencja, nawet jeżeli jest klasyczny. Podobnie Autor pisze: *We know that* X_c *and* X *have the same topological dual spaces (see [52])*. Pozycja [52] to książka N. J. Kaltona, N. T. Pecka i J. W. Robertsa zatytułowana *"An F-space sampler"* [9]. Przydałaby się dokładniejsza referencja, nawet jeżeli wynik jest klasyczny. **Nie zmienia to faktu, że ta część pracy to w gruncie rzeczy drugi doktorat.**

Wreszcie rozdział piąty poświęcony jest charakteryzacji funkcji m-subharmonicznych na kuli, które są radialne, nieujemne i mają zerowe wartości na brzegu. Autor charakteryzuje w pełni takie funkcje w terminach wypukłości względem funkcji $r^{2-\frac{2}{m}}$ (Theorem 5.1.8). W twierdzeniu 5.0.3 w pełni opisuje także m-Hesjan takiej funkcji. Warto podkreślić, że w dowodzie wykorzystuje się klasyczne pojęcie liczby Lelonga uogólnione na przypadek funkcji m-subharmonicznych.

Należy podkreślić, że praca napisana jest w sposób bardzo staranny zarówno pod względem językowym, jak i technicznym, edytorskim. Nie znalazłem w zasadzie żadnych poważniejszych usterek. O tych, które znalazłem, biorąc pod uwagę całość pracy, nie warto wspominać.

Uważam, że recenzowana praca Pana mgra Van Thien Nguyena

jest bardzo dobra. Autor uzyskał w niej bardzo wiele bardzo ciekawych wyników. Wiele z nich moim zdaniem stanie się klasyczną częścią teorii pluripotencjału. Taki charakter ma rozwiązanie problemu Dirichleta w klasie $\mathcal{N}_m(\Omega)$, czy konstrukcja wartości brzegowych funkcji m-subharmonicznych. Tak jak wspominałem ilość uzyskanych wyników z powodzeniem wystarczyłaby na dwa dobre doktoraty. Pan mgr Nguyen wykazał się dużą biegłością w dziedzinie, którą się zajmuje. Wiele z dowodów nosi ślad swoich odpowiedników z klasycznej teorii równania Monge-Ampéra. Nie jest to wadą, wręcz przeciwnie, bardzo dobrze świadczy to o wiedzy Pana mgra Van Thien Nguyena. Wszystko to uzasadnia nie tylko nadanie Autorowi stopnia doktora nauk matematycznych, praca spełnia wszystkie wymagania stawiane doktoratom z matematyki, ale także wyróżnienie rozprawy. Wnioskuję w związku z tym o dopuszczenia Pana mgra Van Thien Nguyena do dalszych etapów postępowania doktorskiego, wnioskuję także o wyróżnienie Jego rozprawy.

Michał Jasiczak

Literatura

[1] P. Åhag, R. Czyż, Modulability and duality of certain cones in pluripotential theory, J. Math. Anal. Appl. 361 (2010), 302–321.

[2] E. Bedford, B. A. Taylor, A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Mathematica 149 (1982), 1–40.

[3] Z. Błocki, Weak solutions to the complex Hessian equation, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 55 (2005), 1735–1756.

[4] H. J. Bremermann, On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterization of Shilov boundaries, Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 246–276.

[5] U. Cegrell, Delta-plurisubharmonic funcions, Math. Scand. 43 (1978), 343–352.

[6] U. Cegrell, Pluricomplex energy, Acta Math. 180 (1998), 187–217.

[7] U. Cegrell, Maximal plurisubharmonic functions, Uzbek Math. J. 1 (2009), 10–16.

[8] V. V. Hung, N. V. Phu, Hessian measures on m-polar sets and applications to the complex Hessian equations, Complex Var. Elliptic Equ. 62 (2017), 1135–1164.

[9] N. J. Kalton, N. T. Peck, J. W. Roberts, An F-space sampler, London Mathematical Society Lecture Notes Series 89, Cambridge University Press, 1984.

[10] N. Kerzman, A Monge-Ampére equation in complex analysis, In Proceedings of symposia in pure mathematics of the American Mathematical Society, (ed. R. O. Wells, jr.), Vol. 30, Part I, 161–167, American Mathematical Society 1977, Providence, RI.

[11] C. O. Kiselman, Fonctions delta-convexes, delta-sousharmoniques et delta-plurisubharmoniques, Séminaire Pierre Lelong (Analyse), anné 1975/76, Lecture Notes in Math. vol. 578, Springer, Berlin 1977, 93–107.

[12] M. Klimek, Pluripotential Theory, London Mathematical Society Monographs new Series 6, Oxford Science Publications, Oxford 1991.

[13] N. C. Nguyen, Subsolution theorem for the complex Hessian equation, Univ. Iagel. Acta Math. 50 (2013), 69-88.

[14] V. T. Nguyen, On delta m-subharmonic functions, Ann. Polon. Math 118 (2016), 25–49.

[15] V. T. Nguyen, The convexity of radially symmetric m-subharmonic functions, Complex Var. Elliptic Equ., published online (2017), 1–11.

[16] A. Sadullaev, Plurisuharmonic measures and capacities on complex manifolds, Uspekhi Mat. Nauk 36 (1981), 53–105.