Sławomir Dinew

Regularność pewnych całkowicie nieliniowych równań eliptycznych w dziedzinie zespolonej

Autoreferat

Spis treści

1. Wstęp

W rozdziale drugim przedstawiona została dotychczasowa kariera naukowa kandydata oraz chronologia awansów zawodowych.

W rozdziale trzecim przedstawione są główne wyniki cyklu monotematycznego przedstawionego do oceny. Pierwsze trzy podrozdziały zawierają podstawowe pojęcia, twierdzenia i przykłady dotyczące równania Monge'a-Ampère'a oraz równania m-Hessjanu zespolonego. Przedstawiona jest teoria na obszarach w $\mathbb{C}^n$, a także na zwartych rozmaitościach kählerowskich.

Pozostałe pięć podrozdziałów rozdziału trzeciego opisują każdy z osobna wyniki poszczególnych prac z cyklu. W każdym z nich przedstawione jest podstawowe twierdzenie oraz skrótowo naszkicowany został agrument bądź narzędzia użyte do jego uzyskania. Każdy z podrozdziałów kończy sie wzmianką o (subiektywnym) znaczeniu danego wyniku- do czego został on później użyty bądź też kto i jak go uogólnił. W przypdaku współautorstwa podany jest przybliżony wkład w powstałą pracę.

Prace wchodzące w skład cyklu zostały uszeregowane w sposób pozwalajacy zdaniem kandydata płynnie przejść od tematyki czysto analitycznej do problemów w których pojawia się nieco więcej pojęć geometrycznych. W szczególności nie został zachowany porządek chronologiczny.

W czwartym rozdziale opisane są skrótowo pozostałe prace kandydata. Rozdział ten został rozdzielony na podrozdziały uwzględniające tematykę omawianych prac: 1 praca dotycząca geometrii algebraicznej oznaczona jako [AG1] omawiana jest w podrozdziale pierwszym, dwie prace z teorii interpolacji i analizy numerycznej oznaczone odpowiednio jako [RBF1, RBF2]- w podrozdziale drugim, praca dotycząca lokalnych własności zespolonego operatora Monge'a-Ampére'a [CMAPDE1]-w trzecim, szereg prac dotyczących operatora Monge'a-Ampère'a na zwartych rozmaitościach kählerowskich i hermitowskich- w czwartym, wreszcie praca dotycząca równania hessjanowego [Hess2] w piątym. Do każdej z prac posiadającej współautora dołączona została moja subiektywna opinia co do wkładu w uzyskany wynik. Dołączona została także moja subiektywna ocena co w danej pracy jest istotne.

Wszystkie prace autorskie zostały oznaczone skrótami pozwalającymi przypisać je do któregoś z działów opisanych powyżej. Z tego też powodu pozwoliłem sobie nie zmieniać notacji dla prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego.

Bibliografia została podzielona na dwie części: na prace autorskie oraz na prace innych Autorów do których odnosze się w autoreferacie.

2. Historia zatrudnienia i awansów naukowych

Dyplomy i stopnie naukowe

2006 Dyplom magistra matematyki, wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

2009 Stopień naukowy doktora nauk matematycznych, wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego

Tytuł rozprawy doktorskiej "Zespolone równanie Monge'a Ampère'a i jego zastosowania w geometrii"

Historia Zatrudnienia

2009-2010 Asystent, Uniwersytet Jagielloński Kraków (Instytut Matematyki)

2010- Adiunkt, Uniwersytet Jagielloński Kraków (Instytut Matematyki)

2011-2013 Visiting assistant professor (staż podoktorski), Rutgers University, Newark (Stany Zjednoczone, New Jersey)

3. Prace z cyklu monotematycznego

W skład cyklu stanowiącego stanowiącego osiągnięcie naukowe zostały włączone następujące prace:

[CMAPDE2] Błocki, Zbigniew; Dinew, Sławomir: A local regularity of the complex Monge-Ampere equation. Math. Ann. 351 (2011), no. 2, 411-416.

[CMAPDE3] Dinew, Sławomir; Zhang, Xi; Zhang, Xiangwen: The $C^{2,\alpha}$ estimate of complex Monge-Ampere equation. Indiana Univ. Math. J. 60 (2011), no. 5, 1713-1722.

[Hess1] Dinew, Sławomir; Kołodziej, Sławomir: A priori estimates for complex Hessian equations. Anal. PDE 7 (2014), no. 1, 227-244.

[Hess3] Dinew, Sławomir; Kołodziej, Sławomir: Liouville and Calabi-Yau type theorems for complex hessian equations, to appear in Amer. J. Math.

[CMAK3] Dinew, Sławomir: Hölder continuous potentials on manifolds with partially positive curvature. J. Inst. Math. Jussieu 9 (2010), no. 4, 705-718.

Omówienie każdej z tych prac znajduje się poniżej.

3.1. **Wprowadzenie.** Głównym obiektem badań w pracach zawartych w cyklu monotematycznym jest zespolone równanie Monge'a-Ampère'a i jego uogólnienia. Operator Monge'a-Ampère'a działa na funckję u zdefiniowaną na obszarze Ω w $\mathbb{C}^n$ o wartościach rzeczywistych za pomocą wzoru

$$\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R}) \ni u \to MA(u)(z) := det(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k})(z).$$

Równanie Monge'a-Ampère'a polega więc na znalezieniu funkcji u, takiej, że

$$MA(u) = f$$

dla pewnej z góry zadanej funkcji f. Warto tu odnotować iż w przypadku $n = 1$ otrzymujemy (modulo stała multiplikatywna) standardowe równanie Poissona, jednak dla $n > 1$ jest to równanie całkowicie nieliniowe. Aby móc stworzyć jakąkolwiek rozsądną teorię związaną z tym równaniem dokłada się więc warunek *eliptyczności.* W przypadku tego równania sprowadza się on do zawężenia klasy rozpatrywanych funkcji u do tych o nieujemnie określonej zespolonej macierzy Hessego (wymusza to także rozpatrywanie nieujemnej prawej strony f).

Warunek ten, pod wieloma względami analogiczny do warunku wypukłości, oznacza że rozpatrywana funkcja musi być *plurisubharmoniczna.*

Definicja 3.1.1. *Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{C}^n$. Funkcja*

$$u : \Omega \ni z \to u(z) \in \mathbb{R} \cap \{-\infty\}$$

jest plurisubharmoniczna jeżeli jest półciągła z góry oraz dla dowolnej prostej zespolonej l funkcja u zawężona do przecięcia l z Ω jest w kazdej składowej spójnej tego przecięcia funkcją subharmoniczną bądź stale równą $-\infty$.

Uwaga 3.1.2. *Zgodnie z tą definicją funkcja $u = -\infty$ jest plurisubharmoniczna. Niektórzy Autorzy wyłączają ten przypadek już w definicji.*

Funkcje plurisubharmoniczne mają pod wieloma względami podobne własności do ich rzeczywistych odpowiedników. Poniżej opisane są podstawowe metody konstruowania funkcji plurisubharmonicznych;

Propozycja 3.1.3. *Suma oraz maksimum funkcji plurisubharmonicznych jest plurisubharmoniczna. Plurisubharmoniczna jest także regularyzacja dowolnej funkcji plurisubharmonicznej za pomocą splotu z jądrem wygładzającym, a także granica malejącego ciągu funkcji plurisubharmonicznych. Złożenie funkcji plurisubharmonicznej z funkcją rosnącą oraz wypukłą jednej zmiennej rzeczywistej jest funkcją plurisubharmoiczną.*

Wracając do równania Monge'a-Ampère'a zwróćmy uwagę że dla gładkich funkcji plurisubharmonicznych ma ono następującą interpertację geometryczną: nieujemnie określona macierz $\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z)$ zadaje nam punktowo hermitowski (pseudo) iloczyn skalarny, lub z punktu widzenia geometrii różniczkowej, pseudometrykę hermitowską. W tej sytuacji $det(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k})(z)$ jest (z dokładnością do stałej multiplikatywnej) współczynnikiem formy objętości związanej z powyższą pseudometryką. Równanie Monge'a-Ampère'a sprowadza się więc do poszukiwania *potencjału* dla metryki o zadanej formie objętości.

Równanie to, jak i wiele innych "zespolonych" równań posiada swój rzeczywisty odpowiednik- jest nim rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a

$$det(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}) = f$$

rozpatrywane dla *wypukłych* funkcji v oraz nieujemnej prawej strony f. Teorię związaną z tym równaniem można znaleźć w [Gut]. Warto jednak odnotować kilka fundamentalnych różnic pomiędzy sytuacją rzeczywistą a zespoloną:

(1) Funkcje wypukłe są oczywiście ciągłe oraz lokalnie lipschitzowskie; przykład funkcji plurisubharmonicznej $u(z) = log||z||$ wskazuje iż własności te nie przenoszą się na "zespoloną wypukłość". Co więcej funkcje plurisubharmoniczne mogą być nieciągłe nawet gdy są ograniczone (z definicji są one tylko półciągłe z góry). Jeżeli chodzi o dalszą regularność to bez dodatkowych założeń dostajemy $u \in L^p_{loc}$ dla każdego $p < \infty$.

(2) Rzeczywiste równanie Monge'a-Ampère'a zawiera *pełny* Hessjan (czyli całą informację różniczkową drugiego rzędu). Pozwala to stwierdzić że ograniczoność laplasjanu v (i oczywiście wypukłość v) daje nam ograniczenie v w normie Sobolewa $W^{2,\infty}$. W zespolonym operatorze występują wyłącznie mieszane pochodne drugiego rzędu wobec czego jedyne co możemy wywnioskować to fakt, że $\Delta u \in L^\infty \Rightarrow u \in W^{2,p}_{loc}$ dla każdego $p < \infty$. Nie można jednak wziąć $p = \infty$- sytuacja jest więc analogiczna do równania Poissona z ograniczoną prawą stroną.

(3) Odwzorowania zachowujące funkcje wypukłe to, jak wiadomo, odwzorowania afiniczne. W przypadku zespolonym złożenie funkcji plurisubharmonicznej z odwzorowaniem holomorficznym jest także funkcją plurisubharmoniczną. Z jednej strony pokazuje to istotne związki tychże funkcji z analizą zespoloną, z drugiej strony "ilość" rozmaitych odwzorowań holomorficznych bardzo utrudnia wszelkie rozumowania operające się na *zwartości*. Warto podkreślić iż argumenty opierające się na zwartości to jedno z głównych narzędzi w teorii Caffarellego dla rzeczywistego równania Monge'a-Ampére'a (patrz [Gut, Caf1]).

(4) Podpoziomice funkcji wypukłych są oczywiście wypukłe, co pozwala zastosować narzędzia analizy wypukłej do badania regularności rozwiązań. Dla odmiany podpoziomice funkcji plurisubharmonicznych nie muszą być nawet spójne: przykładem może być funkcja $log||z - a_1|| + log||z - a_2||$ dla $a_1 \neq a_2 \in \mathbb{C}^n$.

(5) Dla funkcji wypukłych prawdziwe jest oszacowanie $sup_{\Omega'}|\nabla v| \leq C \sup_{\Omega} |v|$ dla każdego relatywnie zwartego obszaru Ω' w obszarze Ω (innymi słowy jest to wewnętrzne oszacowanie na gradient). Trudnym, lecz fundamentalnym wynikiem, pochodzącym od Pogorełowa [Pog] jest twierdzenie iż analogiczne wewnętrzne oszacowanie na drugie pochodne zachodzi o ile v jest dodatkowo rozwiązaniem problemu Dirichleta w wypukłym obszarze Ω

$$\begin{cases} det(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}) = 1 \\ v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Innymi słowy przy "dobrych" warunkach brzegowych jesteśmy w stanie oszacować $||D^2 v||$ na każdym obszarze relatywnie zwartym. Analogiczne wnioski w przypadku funkcji plurisubharmoicznych i zespolonego równania Monge'a-Ampère'a nie są znane i stanowią podstawowy problem w rozwinięciu pełnej teorii regularności dla tego równania.

Jako że operator Monge'a-Ampère'a jest całkowicie nieliniowy problem zdefiniowania *słabych rozwiązań* jest nietrywialny. Jednym z podejść jest skorzystanie z teorii rozwiązań lepkościowych (patrz [Wal]) jednak takie podejście pozwala zdefiniować operator dla ciągłych funkcji plurisubharmonicznych podczas gdy w definicji plurisubharmoniczności występowała wyłącznie półciągłość z góry.

Alternatywnym podejściem jest teoria stworzona przez Bedforda i Taylora [BT82]. Opiera się ona na przejściu z języka wyznaczników macierzy na formy różniczkowe. Jeżeli d jest operatorem różniczkowania zewnętrznego, a ∂ i $\bar{\partial}$ są, odpowiednio, jego $(1,0)$ i $(0,1)$ częścią względem struktury zespolonej to macierz Hessjanu można potratkować jako $(1,1)$-formę

$$i\partial\bar{\partial}u := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} i dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

Zapis ten pozwala nam zdefiniować operator $i\partial\bar{\partial}$ dla dowolnej funkcji lokalnie całkowalnej w sensie dystrybucyjnym- w tej sytuacji współczynniki formy bedą dystrybucjami. Formy o współczynnikach dystrybucyjnych nazywa się *prądami.*

Dla funkcji plurisubharmonicznych u prąd $i\partial\bar{\partial}u$ będzie $(1,1)$ prądem nieujemnym. Z twierdzenia Riesza wynika więc, że współczynniki prądu muszą być miarami zespolonymi. Pozawala to poprawnie zdefiniować $ui\partial\bar{\partial}u$, o ile $u \in L^{\infty}_{loc}$. Wobec czego różniczkując jescze raz otrzymujemy w sensie dystrybucyjnym $i\partial\bar{\partial}u \wedge i\partial\bar{\partial}u := i\partial\bar{\partial}(ui\partial\bar{\partial}u)$. Bedford i Taylor w [BT82] wykazali iż powstały $(2,2)$-prąd jest również dodatni tak więc procedurę tą można kontynuować aż do uzyskania (n,n)-prądu $(i\partial\bar{\partial}u)^n$ który musi być nieujemną miarą borelowską.

Z operatorem Monge'a-Ampère'a związana jest także teoria "gładka" badająca rozwiązalnosc problemu Dirichleta w sensie klasycznym. Podstawowym w teorii jest wynik Caffarellego, Kohna, Nirenberga i Sprucka [CKNS]:

Twierdzenie 3.1.4. *Niech Ω będzie ściśle pseudowypukłym obszarem o brzegu klasy $\mathcal{C}^\infty$. Dla dowolnych danych $f > c \geq 0, f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\,\Omega)$ problem Dirichleta*

$$\begin{cases} u \in PSH(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ (i\,\partial\,\bar{\partial} u)^n = f dV \text{ (dV to miara Lebesgue'a)} \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases} \tag{3.2}$$

posiada gładkie rozwiązanie $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Ponadto rozwiązanie jest jedyne.

Twierdzenie to mówi iż przy gładkich danych problem Dirichleta posiada rozwiązanie gładkie w obszarach ściśle pseudowypukłych. Geometria brzegu jest tu istotna gdyż w przypadku gdy brzeg zawiera dysk analityczny każda funkcja z przestrzeni $PSH(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ musiałaby się zawężać do funkcji subharmonicznej na tym dysku, a więc nie musiałaby pokrywać się z zadanymi dowolnie danymi brzegowymi.

Twierdzenie to jednak nie oznacza iż gładka prawa strona dla operatora Monge'a-Ampère'a implikuje zawsze gładkie rozwiązanie. Fundamentalny przykład pochodzący od Pogorełowa [Pog], zmodyfikowany w sytuacji zespolonej przez Błockiego [Bl99] wskazuje iż operator ten nie jest w rzeczywistości *hipoeliptyczny*:

Przykład 3.1.5. *funkcja n-zmiennych zespolonych ($n > 1$) postaci*

$$u(z_1, z') = (1 + |z_1|^2)||z'||^{2-2/n}$$

jest plurisubharmoniczna, nie jest gładka na prostej $z' = 0$, lecz jej operator Monge'a-Ampère'a wynosi $(1 - 1/n)^n(1 + |z_1|^2)^{n-2}$, jest więc funkcją gładką (jest ona nawet analityczna) i ściśle dodatnią.

Tak więc teoria regularności dla operatora Monge'a-Ampère'a jest z konieczności nietrywialna przy czym regularność dla problemu Dirichleta istotnie zależy od warunków brzegowych i od geometrii samego brzegu, a regularność lokalną można badać wyłącznie przy założeniu dodatkowych warunków.

3.2. Równanie Monge'a-Ampére'a na rozmaitościach kählerowskich.

Niech X będzie zwartą rozmaitością zespoloną wymiaru n. Pojęcie plurisubharmoniczności łatwo przenosi się na rozmaitości zespolone, jednak z zasady maksimum wynika iż każda funkcja plurisubharmoniczna na X musi być stała. Przy pewnej modyfikacji możemy jednak dostać nietrywialną klasę funkcji:

Definicja 3.2.1. *Niech ω będzie formą różniczkową typu $(1, 1)$ na rozmaitości X. Funkcję ψ nazywamy plurisubharmoniczną względem ω jeżeli jest półciągła z góry, całkowalna, oraz zachodzi nierówność*

$$\omega + i\,\partial\,\bar{\partial}\psi \geq 0$$

rozumiana w sensie dystrybucyjnym.

Funkcje takie nazywa się także funkcjami ω-plurisubharmonicznymi. Intuicyjnie im bardziej "dodatnia" jest forma ω tym większa jest klasa funkcji ω-plurisubharmonicznych. W sytuacji gdy forma ω jest wszędzie sciśle dodatnia to każda funkcja klasy $\mathcal{C}^2$ o odpowiednio małej C^2 normie jest ω-plurisubharmoniczna.

Odnotujmy iż istnieje wiele $(1, 1)$-form na X które są dodatnio określone w każdym punkcie- wystarczy wziąć dodatnie $(1, 1)$-formy lokalne w mapach i skleić je za pomocą rozkładu jedności (analogiczna konstrukcja dodowdzi iż na każdej zwartej rozmaitości zespolonej istnieje metryka hermitowska). Tak skonstruowana forma nie jest, na ogół, zamknięta ze względu na różniczkowanie zewnętrzne:

Definicja 3.2.2. *Dodatnia $(1,1)$-forma ω na rozmaitości X jest formą kählerowską jeżeli $d\omega = 0$.*

Uwaga 3.2.3. *Istnienie na danej rozmaitości zespolonej formy kählerowskiej narzuca pewne ograniczenia topologiczne. W szczególności nie każda zwarta rozmaitość zespolona posiada taką formę-* [CMAK6].

Warunek ten oznacza iż lokalnie można formę kählerowską zapisać jako $i\partial\bar{\partial}\rho$ dla pewnej lokalnej funkcji plurisubharmonicznej (potencjału). Tak więc w przypadku kählerowskiej formy ω dostajemy wyjątkowo elegancki opis funkcji ω-plurisubharmonicznych:

Obserwacja 3.2.4. *Jeżeli ω jest formą kählerowską to funkcja ψ jest plurisubharmoniczna wtedy i tylko wtedy gdy $\psi + \rho$ jest lokalną funkcją plurisubharmoiczną dla każdego lokalnego potencjału ρ.*

Analogicznie do sytuacji lokalnej można więc zdefiniować operator Monge'a-Ampère'a za pomocą n-tego iloczynu zewnętrznego formy

$$\omega + i\partial\bar{\partial}\psi.$$

W przypadku kählerowskim wystarczy nawet rozpisać lokalnie $\omega = i\partial\bar{\partial}\rho$ i skorzystać z definicji operatora Monge'a-Ampère'a dla funkcji $\rho + \psi$ (łatwo się przekonać iż definicja nie zależy od wyboru potencjału ρ).

Równanie Monge'a-Ampère'a sprowadza się więc do znalezienia funkcji ω-plurisubharmonicznej ψ spełniającej

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\psi)^n = f\omega^n$$

dla ustalonej nieujemnej funkcji f.

Odnotujmy tu istotną różnicę w porównaniu do sytuacji lokalnej: ze wzoru Stokesa wynika iż

$$\int_X (\omega + i\partial\bar{\partial}\psi)^n = \int_X \omega^n, \tag{3.3}$$

gdyż X jest rozmaitością zwartą bez brzegu. Oznacza to iż aby rozwiązanie istniało prawa strona musi spełniać warunek konieczny

$$\int_X f\omega^n = \int_X \omega^n.$$

Fundamentalnym wynikiem rozstrzygającym o istnieniu rozwiązań tegoż równania jest twierdzenie Yau [Yau]:

Twierdzenie 3.2.5. *Niech (X, ω) będzie zwartą rozmaitością kählerowską. Jeżeli $f \geq c > 0$ jest funkcją gładką spełniająca warunek konieczny, to istnieje jedyna z dokładnością do stałej addytywnej gładka funkcja ω-plurisubharmoniczna ψ spełniająca równanie*

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\psi)^n = f\omega^n.$$

Postawą teorii regularności dla równania Monge'a-Ampère'a jest więc pytanie jaką regularność dla funkcji ψ możemy dostać osłabiając założenia na funkcję f (jednak dalej f musi spełniac warunek konieczny). Warto tu przytoczyć wyniki S. Kołodzieja [Koj98, Koj05]- w pracach tych udowodniono iż dla f nieujemnych i całkowalnych z p-tą potęgą dla jakiegoś $p > 1$ rozwiązanie musi być hölderowsko ciągłe (dla $p = 1$ nie musi być ono jednak nawet ograniczone).

W przypadku kählerowskim równanie Monge'a-Ampère'a jest równaniem opisującym formę objętości w zależności od zadanej $(1,1)$-formy hermitowskiej. Można z tego opisu dostać jednak jeszcze więcej; w przypadku kählerowskim *krzywizna Ricciego* formy ω zadana jest w lokalnych współrzędnych wzorem

$$(3.4) \qquad Ric(\omega)_{j\bar{k}} = -i\frac{\partial^2}{\partial z_j \bar{\partial} z_k} log(\omega^n),$$

gdzie po prawej stronie wzoru utożsamiamy (n,n)-formę ω^n z jej współczynnikiem względem kanonicznej (n,n)-formy

$$idz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge idz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \cdots \wedge idz_n \wedge d\bar{z}_n.$$

Tak więc wyjątkowo prosty wzór na krzywiznę Ricciego w sytuacji kählerowskiej (unikamy tu obliczanie pełnego tensora krzywizny i współczynników Christoffela) także opiera się na równaniu Monge'a-Ampère'a.

3.3. Operator m-Hessjanu. Operator m-Hessjanu zdefinowany jest względem formy kählerowskiej ω za pomocą wzoru

$$(i\partial\bar{\partial}u)^m \wedge \omega^{n-m}$$

w przypadku obszarów w $\mathbb{C}^n$ bądź też

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}u)^m \wedge \omega^{n-m}$$

na zwartych rozmaitościach kählerowskich.

Jest on w pewnym sensie operatorem interpolującym między operatorem Laplace'a dla $m=1$ i operatorem Monge'a-Ampère'a ($m=n$), tak więc związana z nim nieliniowa teoria potencjału powinna stanowić pole do porównań pomiędzy klasyczną teorią potencjału a teorią pluripotencjału.

Operator m-Hessjanu także rozpatrywany jest na podklasie funkcji dla których jest on eliptyczny. Własciwy zbiór funkcji to tzw. funkcje m-subharmoniczne spełniające warunki

$$(i\partial\bar{\partial}u)^k \wedge \omega^{n-k} \geq 0, k = 1, 2\cdots, m,$$

a w przypadku zwartych rozmaitości kählerowskich

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}u)^k \wedge \omega^{n-k} \geq 0, k = 1, 2\cdots, m.$$

Definicja ta zależy od formy ω. I tak dla standardowej formy kählerowskich w $\mathbb{C}^n$ $\omega = i\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j$ warunek ten oznacza iż dla gładkich funkcji u k-ty wielomian symetryczny wartości własnych macierzy Hessego $\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$ zdefiniowany wzorem

$$\sigma_k(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k}$$

jest nieujemny dla k od 1 do m. W szczególności funkcje te muszą być subharmoniczne. Z powyższych nierówności wynika także iż macierz Hessego musi mieć co najmniej m nieujemnych wartości własnych.

W odróżnieniu od funkcji plurisubharmonicznych funkcje m-subharmoniczne nie są tak blisko związane z analizą zespoloną. Jak łatwo sprawdzić złożenie odwzorowania holomorficznego z funkcją m- subharmoniczną nie musi być funkcją m-subharmoniczną. Ich znaczenie dla analizy zespolonej wynika jednak ze spostrzeżenia poczynionego powyżej. W analizie zespolonej bardzo ważnym obiektem badań są funkcje których macierze Hessego posiadają dużą ilość dodatnich wartości własnych (istnienie takiej funkcji wyczerpującej dany obszar implikuje ograniczenia topologiczne- [AG]). Niestety własność ta jest bardzo niestabilna: przykład funkcji $u(z) = -2|z_1|^2 + |z_2|^2$ oraz $v(z) = |z_1|^2 - 2|z_2|^2$ wskazuje iż własność ta nie zachowuje się przy dodawaniu a więc nie jest możliwe stworzenie sensownej teorii potencjału związanej z tym warunkiem. Dodatkowo jak pokazali Diederich i Fornaess [DF] pojęcie niegładkiej funkcji jest w tej sytuacji wysoce nietrywialne i niektóre funkcje niegładkie nie da się aproksymować pozostając w tej klasie.

Funkcje m-subharmoniczne stanowią więc rozsądny kompromis który nie obejmuje wszystkich funckji o co najmniej m dodatnich wartościach własnych, jednak dla nich stworzenie teorii potencjału jest możliwe (oznacza to także możliwość konstruowania takich funkcji za pomocą rozwiązań stosownych równań).

Problem Dirichleta dla operatora m-Hessjanu został rozwiązany w pracach [Li] oraz [Bl05]. Prawdziwe jest następujace twierdzenie stanowiące odpowiednik twierdzenia Caffarellego, Kohna, Nirenberga i Sprucka:

Twierdzenie 3.3.1. *Niech Ω będzie ściśle $(m-1)$-pseudowypukłym obszarem o brzegu klasy $\mathcal{C}^\infty$. Dla dowolnych danych $f > c \geq 0, f \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\partial\Omega)$ problem Dirichleta*

$$\begin{cases} u \in m - SH(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \\ (i\,\partial\bar{\partial}u)^m \wedge \omega^{n-m} = f dV \\ u|_{\partial\Omega} = \phi \end{cases} \tag{3.5}$$

posiada gładkie rozwiązanie $u \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Ponadto rozwiązanie jest jedyne.

Warto także odnotować iż rzeczywisty oprowiednik tego równania jest także intensywnie badany- w artykule przeglądowym [Wan2] została szczegółowo przedstwiona teoria rzeczywista.

3.4. **Praca** [CMAPDE2]. Jak już zostało wspomniane nawet gładka i ściśle dodatnia prawa strona nie gwarantuje gładkości rozwiązania równania Monge'a-Ampère'a. Rodzi to naturalne pytanie *co jeszcze należy dołożyc by zagwarantować gładkość rozwiązań.* W sytuacji gdy rozpatrujemy problem lokalny (bez danych brzegowych) jedyną możliwością jest dołożenie warunków na samo rozwiązanie u. Innymi słowy pytanie jest o *minimalne* założenia gwarantujące regularność. W związku z przykładem Pogorełowa (3.1.5) jasne jest, że istnieją pewne ograniczenia "dolne" tak w sensie przestrzeni Sobolewa jak i w przypadku przestrzeni Höldera.

W pracy [CMAPDE2] udało nam sie całkowicie rozwiązać problem minimalnej regularności w przestrzeniach Sobolewa. Okazuje się, iż w skali regularności Sobolewa przykłady typu Pogorełowa są *optymalne*: każde rozwiązanie minimalnie regularniejsze musi być już gładkie. Dokładniej wynik z [CMAPDE2] wygląda następująco:

Twierdzenie 3.4.1. *Niech $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap PSH(\Omega)$ rozwiązuje równanie Monge'a-Ampère'a*

$$det(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k})(z) = f(z),$$

gdzie $f \geq c > 0, |\Delta f| \leq C$. Jeżeli $p > n(n-1)$ to $\Delta u \in L^\infty_{loc}$ oraz dla każdego $\Omega' \subset\subset \Omega$ $||\Delta u||_{L^\infty(\Omega')} \leq C(c, ||\Delta f||_{L^\infty}, n, p, dist\{\Omega', \partial\Omega\})$.

Z tego wyniku oraz standardowej teorii eliptycznej wynika iż $u \in W^{2,q}_{loc}$ dla każdego $q < \infty$. Przy mocniejszych warunkach na prawą stronę dostajemy także lepszą regularność rozwiązań różniczkując samo równanie. W szczególności $f \in C^\infty, f \geq c > 0$ daje nam gładkość rozwiązania.

Metoda dowodu polega na wykorzystaniu techniki Trudingera [Tr] (skonstruowanej dla rzeczywistych równań) połączonej z oszacowaniem S.Kołodzieja [Koj98] na normę jednostajną rozwiązań. I tak perturbację funkcji Δu, bądź jej przybliżenia przemnaża się przez odpowiednio dobraną funkcję testującą na kuli i dla tak powstałego iloczynu v oblicza się wartość operatora $L(v) = \sum_{i,j=1}^{n} u^{i\bar{j}} v_{i\bar{j}}$. Operator ten **nie** jest jednostajnie eliptyczny więc przemnożenie przez funkcję testującą nie pozwala nam kontrolować znaku uzyskanego wyniku. Jednak założenia pozwalają kotrolować normę L^q (dla pewnego $q > 1$) części ujemnej. Rozwiązując więc problem Dirichleta z prawą stroną równą $-min\{ L(v), 0\}$ i zerowymi warunkami brzegowymi dostaniemy z twierdzenia Kołodzieja [Koj98] ograniczone rozwiązanie w. Wtedy z prostych rachunków wynika iż $L(v + Cw) \geq 0$ dla odpowiednio dobranej stałej C, a dalej z zasady maksimum dostajemy iż $v \leq -Cinf_B w$, przy czym ostatni wyraz jest ograniczony.

Częściowe wyniki w tej dziedzinie były znane [Bl99, He]. Znaczenie pracy polega na tym iż uzyskano wynik optymalny. Mój wkład w pracę wynosi w przybliżeniu 50 procent. Byłem odpowiedzialny za przejście z oszacowania a priori do otrzymania właściwej regularności oraz za pewną kluczową modyfikację funkcji v.

3.5. **Praca** [CMAPDE3]. W pracy [CMAPDE3] badany jest problem częściowo powiązany z pracą poprzednią: rozważa się warunki w przestrzeniach Höldera gwarantujące regularność. Dokładniej klasyczne oszacowania typu Schaudera dla operatora Laplace'a $\Delta u(z) = f(z)$ pozwalają oszacować dla każdego $\alpha \in (0, 1)$ (lokalnie) $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ normę rozwiązania za pomocą $\mathcal{C}^{\alpha}$ normy prawej strony f (dowód tego klasycznego wyniku można znaleźć w [GT]). Znów przykład Pogorełowa (3.1.5) pokazuje iż bez dodatkowych założeń analogiczne oszacowanie nie może zachodzić dla zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a. Wzorując się na sytuacji przestrzeni Sobolewa można postawić następujące pytanie:

Niech $u \in C^{1,\beta}(\Omega) \cap PSH(\Omega)$ rozwiązuje równanie Monge'a-Ampère'a

$$det(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k})(z) = f(z),$$

gdzie $f \geq c > 0, |f|_{\mathcal{C}^\alpha} \leq C$. Dla jakich β wynika stąd, że $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$?

Przykład Pogorełowa (zakładając jego optymalność) sugerowałby iż odpowiedzią na to pytanie jest dowolne β większe niż $1-\frac{2}{n}$. Warto jednak zwrócić uwagę na istotna różnicę w porównaniu do przestrzeni Sobolewa: warunek iż $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$ nie przekłada się w żaden sensowny sposób na regularność minorów macierzy Hessego (w przypadku przestrzeni $W^{2,p}$ dostajemy L^q całkowalność $(n-1)$-minorów dla stosownego q co jest bardzo istotnym elementem w dowodzie [CMAPDE2]). Z innej strony odpowiednik powyższego problemu dla rzeczywistego operatora Monge'a-Ampère'a został rowiązany ([Ur1, Caf1])- okazuje się, że w tej sytuacji rzeczywisty przykład Pogorełowa jest optymalny.

Problem w sytuacji zespolonej pozostaje nierozwiązany. W pracy [CMAPDE3] uzyskano następujący wynik częściowy: jeżeli $u \in C^{1,1}(\Omega)$ spełnia powyższe warunki, to $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ (czyli można wziąć $\beta = 1$). Istotą dowodu jest "wymieszanie" metod rzeczywistych (lokalnej aproksymacji z "zamarzniętą" prawą stroną- jest to technika pochodząca od X.-J. Wanga [Wan1]) z zespolonym wewnętrznym $\mathcal{C}^{1,1}$ oszacowaniem rozwiązań w kuli pochodzącym od Bedforda i Taylora [BT76]. Warto wspomnieć iż oszacowanie Bedforda-Taylora nie ma naturalnego rzeczywistego odpowiednika- opiera się ono na technice typowo zespolonej i wykorzystuje tranzytywność grupy automorfizmów kuli jednostkowej. Jest to też pierwsza praca wykorzystująca rzeczywistą technikę aproksymacyjną Wanga w sytuacji zespolonej.

Praca ta doczekała się uogólnienia przez Y. Wanga [Wa2]: pokazał on iż wystarczy założyć iż $\Delta u \in L^\infty$ - jest to warunek istotnie słabszy niż $u \in C^{1,1}(\Omega)$.

Swój wkład w pracę szacuję na 34 procent. Powstała ona jako połączenie niezależnych badań- moich oraz X. i X. W. Zhangów. Moim wkładem było w szczególności przejście z założenia o C^2-regularności na $C^{1,1}$-regularność.

3.6. **Praca** [Hess1]. W pracy tej stworzone zostały podwaliny pod nieliniową teorię potencjału związaną z operatorem m-Hessjanu

$$(i\partial\bar{\partial}u)^m \wedge \omega^{n-m},$$

gdzie ω jest dowolną formą kählerowską na Ω (przypadek klasyczny to $\omega = i\partial\bar{\partial}||z||^2$- wtedy operator m-Hessjanu z dokładnością do stałej multiplikatywnej pokrywa się z sumą m-tych minorów głownych macierzy Hessego). Badania nad tymi operatorami zapoczątkowali S. Y. Li [Li] oraz Z. Błocki [Bl05]. Po ukazaniu się pracy [Hess1] nowa nieliniowa teoria potencjału była badana przez wielu autorów- [Lu, SA, WW, N].

Wyniki uzyskane w [Hess1] są dwojakiego typu. Pierwsza grupa to odpowiedniki stosownych twierdzeń dla operatora Monge'a-Ampére'a. I tak Twierdzenie 4.1 w [Hess1] to odpowiednik głównego wyniku pracy [CMAPDE2] dla równania m-Hessjanu. Okazuje się że przy gładkiej i silnie dodatniej prawej stronie rozwiązanie równania m-Hessjanu jest gładkie pod warunkiem iż należy ono a priori do przestrzeni $W^{2,p}(\Omega), p > n(m-1)$. Brak stosownych przykładów typu Pogorełowa nie pozwala stwierdzić jednak czy jest to wynik optymalny. Niemniej implementując technikę z [CMAPDE2] do rzeczywistego równania m-Hessianu dostajemy analogiczne twierdzenie z wykładnikiem $p > \frac{n(m-1)}{2}$ co poprawia znane dotąd optymalne wyniki (w [Ur2] wykazano iż można wziąć $p > \frac{(n-1)m}{2}$).

Twierdzenie 2.10 z kolei rozwiązuje problem Dirichleta dla ciągłych danych brzegowych w gładkich obszarach silnie $(m-1)$-pseudowypukłych z prawą stroną f należącą do L^q dla $q > \frac{n}{m}$. Jest to odpowiednik twierdzenia Kołodzieja [Koj98] dla zespolonego operatora Monge'a-Ampère'a.

Druga grupa wyników to własności funkcji m-subharmonicznych, które są odmienne niż dla funkcji plurisubharmonicznych. I tak wiadomo iż $u(z) := -\frac{1}{||z||^{2n/m-2}}$ jest funkcją m-subharmoniczną, jednak $u \in L^p_{loc}$ tylko dla $p < \frac{nm}{n-m}$ (funkcje plurisubharmoniczne są L^p_{loc} całkowalne dla każdego wykładnika $p < \infty$). Wzorując się na tym przykładzie Z. Błocki [Bl05] postawił hipotezę iż *dowolna funkcja m-subharmoniczna należy do L^p_{loc} dla $p < \frac{nm}{n-m}$*. Odpowiednik tej hipotezy dla rzeczywistego operatora m-Hessjanu jest prawdziwy: wynik ten został uzyskany w [TW1] jednak metody użyte w tej pracy nie mogą być zastosowane do sytuacji zespolonej (udowodnione w [TW1] nierówności typu Sobolewa nie zachodzą dla funkcji m-subharmonicznych).

Propozycja 2.2 w [Hess1] daje częściową pozytywną odpowiedź na hipotezę Błockiego: funkcje m-subharmoniczne ograniczone przy brzegu rozpatrywanego obszaru (czyli funkcje o *zwartych osobliwościach*) są L^p całkowalne z wykładnikami dokładnie jak w hipotezie. Warto odnotować iż technika dowodu jest całkowicie nowa i opiera się na nierównościach dla mieszanych miar Monge'a-Ampère'a. Nierówności te kandydat badał już w swoim doktoracie [CMAPDE1].

Swój wkład w pracę szacuję na 50 procent. W szczególności zainicjowałem projekt badań nad operatorem Hessjanu oraz byłem odpowiedzialny za Twierdzenie 4.1.

3.7. **Praca** [Hess3]. W pracy tej rozważane jest globalne równanie m-Hessjanu na zwartej rozmaitości kählerowskiej (X, ω). Równanie to przybiera postać

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\phi)^m \wedge \omega^{n-m} = f\omega^n,$$

gdzie f jest dodatnią funkcją gładką, spełniajacą warunek konieczny $\int_X \omega^n = \int_X f\omega^n$ a ϕ jest funkcją $\omega - m$-subharmoniczną. Rozwiązanie tego równania można normalizować za pomocą stałej addytywnej (dodanie stałej do ϕ nie zmienia równania). Zakłada się więc, że $sup_X\phi = 0$. Okazuje się, że równanie tej postaci może mieć co najwyżej jedno gładkie rozwiązanie (wynika to z faktu iż różnica dwóch rozwiązań byłaby funkcją harmoniczną względem operatora jednostajnie eliptycznego). Problem *istnienia* gładkiego rozwiązania jest analogiczny do problemu Calabiego w przypadku $m = n$.

W fundamentalnej pracy [Yau] S. T. Yau pokazał istnienie rozwiązania zespolonego równania Monge'a-Ampère'a na zwartych rozmaitościach kählerowskich. Dowód opiera się na *metodzie ciągłości*: tworzy się ciągłą jednoparametrową rodzinę równań na której jednym końcu ustawia się nasze równanie natomiast na drugim- równanie które można rozwiązać. Metoda ciągłości polega na udowodnieniu iż zbiór parametrów dla których równanie posiada gładkie rozwiązanie jest jednocześnie domknięty i otwarty. Otwartość w metodzie ciągłości dowodzi się linearyzując problem i korzystając z twierdzenia o odwzorowaniu odwrotnym w stosownych przestrzeniach Banacha ([Yau, T, Si]). Domkniętość w zbiorze parametrów dowodzi się pokazując odpowiednie oszacowania a priori.

W przypadku równania Monge'a-Ampère'a jak i w przypadku równania Hessjanu potrzebne oszacowania a priori to:

(1) oszacowanie jednorodne na rozwiązanie- czyli kontrola nad $||u||_{L^\infty}$;
(2) oszacowanie gradientu- czyli kontrola nad $||\nabla u||_{L^\infty}$;
(3) oszacowanie drugiego rzędu- czyli kontrola nad $||\Delta u||_{L^\infty}$ (w przypadku zespolonym jest to oszacowanie istotnie prostsze niż oszacowanie $||D^2u||_{L^\infty}$, gdyż w równaniach zespolonych nie występują czyste pochodne drugiego rzędu);
(4) oszacowanie wyższego rzędu- kontrola nad $||u||_{C^3}$, bądź nad $||u||_{C^{2,\alpha}}$ dla $\alpha > 0$.

Mając powyższe oszacowania kontrolę norm wyższego rzędu można dostać różniczkując równanie i stosując oszacowania Schaduera (w tej sytuacji powstałe równania są już jednostajnie eliptyczne).

W przypadku równania Monge'a-Ampère'a oszacowania na normę C^3 pochodzi od Calabiego [Yau, Si]; alternatywnie można zastosować teorię pochodzącą od Evansa-Kryłowa która pozwala dostać oszacowanie na normę $C^{2,\alpha}$ (dla pewnego $\alpha > 0$) bezpośrednio z oszacowania drugiego rzędu (teorię Evansa-Kryłowa można dostosować do sytuacji zespolonej- zostało to pokazane np. w [Si] bądź [Bl00]). Z kolei oszacowanie drugiego rzędu wynika bezpośrednio z oszacowania jednorodnego za pomocą techniki perturbacyjnej pochodzącej od Pogorełowa- rachunek ten można znaleźć w pracy [Yau] bądź w książkach [Si, T]. Przy okazji dość niezwykłym efektem w dowodzie ([Yau]) jest niezależność oszacowania drugiego rzędu od oszacowania rzędu pierwszego- jest to bardzo nietypowe dla równań nieliniowych drugiego rzędu.

Z powyższych argumentów wynika iż wszystkie oszacowania a priori wynikają z pierwszego (historycznie najtrudniejszego)- jest to główne osiągnięcie pracy [Yau] gdzie zastosowano technikę iteracyjną Mosera.

W przypadku równań hessjanowych otwartość w metodzie ciągłości dowodzi się analogicznie. Jeżeli zaś chodzi o oszacowania a priori to łatwo uogólnić metodę Yau dla oszacowania jednorodnego. Można także zastosować teorię Evansa-Kryłowa. Wystarczy więc otrzymać oszacowania na gradient i laplasjan.

W pracy [HMW] Autorzy uzyskali oszacowanie a priori na laplasjan *zależne jednak od oszacowania na gradient*. Ściślej rzecz biorąc udowodnili oni nierówność

$$sup_X \Delta_\omega \phi \leq C(1 + \sup_X ||\nabla\phi||^2), \tag{3.6}$$

dla pewnej stałej C zależnej od f, n, m, ω, X oraz $||\phi||_{L^\infty}$. Wystarczy więc oszacować gradient.

Oszacowanie na gradient okazuje się jednym z głównych problemów w całej teorii (analogiczna sytuacja występuje w wielu równaniach w dziedzinie zespolonej- [ToW13, Sz, PPZ, STW]. W przypadku równania Monge'a-Ampère'a oszacowanie na gradient można znaleźć w [Bl09]). Pomimo wielu prób (znane są mi co najmniej dwie prace zamieszczone na arXiv w których wynik ten był dowodzony, jednak dowód zawierał lukę) odpowiednik twierdzenia Błockiego z [Bl09] nie jest znany.

Zamiast dowodzić bezpośrednio oszacowanie na gradient można posłużyć się metodą pośrednią: można mianowicie skorzystać z *analizy rozdmuchań (blow-up analysis)*. Gdyby oszacowanie nie zachodziło to na danej rozmaitości X znaleźlibyśmy ciąg $\omega - m$-subharmonicznych funkcji ϕ_j (spełniających stosowne równania) oraz ciąg punktów x_j zbieżny do pewnego punktu x, takie że $||\nabla\phi_j(x_j)|| = sup_X||\nabla\phi_j|| = d_j \to \infty$. W takim razie skalując zmienne w lokalnym układzie współrzędnych dookoła x (utożsamionego z zerem) dostalibyśmy iż (lokalne) funkcje $\tilde{\phi}_j(z) := \phi_j(x_j + z/d_j)$ mają gradienty w zerze równe 1. Co więcej oszacowanie Hou-Ma-Wu (3.6) pozwala nam wnioskować iż ciąg tych funkcji, zdefiniowanych na coraz większych kulach ma jednostajnie oszacowny laplasjan, ze standardowej teorii eliptycznej dostajemy więc, że ciąg $\tilde{\phi}_j$ zbiega w topologii $C^{1,\alpha}_{loc}$ do pewnej niestałej funkcji ϕ na $\mathbb{C}^n$. Z równań łatwo wywnioskować po przejściu granicznym iż ϕ musi być m-subharmoniczna względem formy $\omega = i\partial\bar{\partial}||z||^2$ na $\mathbb{C}^n$, co więcej ϕ spełnia równanie

$$(i\partial\bar{\partial}\phi)^m \wedge \omega^{n-m} = 0.$$

Poza tym jest oczywiście ograniczona, lipschitzowska oraz niestała.

Klasyczne twierdzenie Liouville'a orzeka iż każda ograniczona funkcja plurisubharmoniczna na $\mathbb{C}^n$ musi być stała. Subtelność sytuacji polega na tym, że podobnie do funkcji subharmonicznych w $\mathbb{R}^n, n \geq 3$ analogiczny wniosek **nie** zachodzi dla funkcji m-subharmonicznych w $\mathbb{C}^n$: stosownym kontrprzykładem jest funkcja $max\{-1, -||z||^{2-2n/m}\}$. Z analizy rozdmuchań dostajemy jednak znacznie więcej informacji o funkcji ϕ.

Głównym twierdzeniem w pracy [Hess3] jest następujący fakt:

Twierdzenie 3.7.1. *Każda ograniczona, lipshitzowska m-subharmoniczna funkcja ϕ na $\mathbb{C}^n$ spełniająca równanie $(i\partial\bar{\partial}\phi)^m \wedge \omega^{n-m} = 0$ musi być stała.*

Twierdzenie to ostatecznie rozwiązuje (w sposób niejawny) problem oszacowania na gradient, a w efekcie dostajemy pełny odpowiednik Twierdzenia Calabiego-Yau dla równań m-hessjanowych.

Główny pomysł w dowodzie tegoż twierdzenia polega na analizie zachowania funkcji $\phi_r(z) := \frac{1}{Vol(B(z,r))}\int_{B(z,r)}\phi^2(w)dw$, (zakładając iż $\phi \geq 0$ co zawsze można osiągnąć dodając stałą addytywną). Łatwo sprawdzić iż także jest to funkcja m-subharmoniczna przy czym jej Hessian zespolony $i\partial\bar{\partial}\psi_r$ składa się z uśrednienia całkowego $\phi i\partial\bar{\partial}\phi$ oraz z uśrednienia całkowego $|\nabla\phi|^2$. Nie wdając się w szczegóły pierwszy z tych wyrazów już jest m-subhamroniczną formą typu $(1,1)$ (gdyż jest uśrednieniem całkowym form typu $\phi i\partial\bar{\partial}\phi$) natomiast z drugiego wyrazu można dostać dodatkową dodatniość pod warunkiem iż średnie gradientu nie będą znikać. Manipulując promieniem r można dojść do alternatywy:

Albo znajdziemy odpowiednio duże r tak aby dla jakiegoś małego $c > 0$ zachodziło $\frac{1}{Vol(B(z,r))}\int_{B(z,r)}|\nabla\phi|^2(w)dw \geq c\omega$, albo też okaże się iż funkcja ϕ zależy od $(n-1)$-zmiennych (dokładniej- istnieje kierunek w którym funkcja musi być stała).

Wykorzystujac tą redukcję wymiaru albo dojdziemy do ograniczonej funckji plurisubharmonicznej m-zmiennych na pewnej płaszczyźnie m-wymiarowej w $\mathbb{C}^n$ (która z klasycznego twierdzenia Liouville'a musi być stała), albo musi zachodzić pierwsza część alternatywy. Oznacza ona jednak, że funkcja uśredniająca kwadrat ϕ dla pewnego promienia r musiałaby być *ściśle* m-subharmoniczna i jednocześnie ograniczona co jak stosunkowo łatwo wykazać prowadzi do sprzeczności.

Wynik ten został przyjęty do druku stosunkowo niedawno jednak już jako preprint był wielokrotnie cytowany. Warto tu wspomnieć o pracach [Sz, ToW13, STW] w których wykorzystuje się wyżej opisaną technikę oszacowania na gradient za pomocą rozdmuchań. Technika ta (przy braku bezpośredniego oszacowania) jest de facto jedyną znaną w problemach tego typu.

Swój wkład w pracę szacuję na 50 procent. W szczególności byłem odpowiedzialny za sprowadzenie oszacowania na gradient do twierdzenia Liouville'a- zgodnie z sugestią z pracy [HMW]. Poza tym uściśliłem argument z modyfikacją promienia r prowadzący do redukcji wymiaru bądź do ścisłej m-subharmoniczności.

3.8. **Praca** [CMAK3]. W pracy [Koj05] udowodniona została następująca regularność rozwiązania równania Monge'a-Ampère'a w przypadku gdy prawa strona równania jest L^p-całkowalna dla $p > 1$:

Twierdzenie 3.8.1. *Niech* (X, ω) *będzie zwartą rozmaitością kählerowską wymiaru* n *oraz* $f \geq 0$ *będzie funkcją całkowalna z* p*-ta potęgą* $(p > 1)$ *oraz spełniajacą warunek konieczny* $\int_X f\omega^n = \int_X \omega^n$. *Wtedy rozwiązanie* ψ *problemu* $(\omega + i\partial\bar{\partial}\psi)^n = f\omega^n$ *jest hölderowsko ciągłe z wykładnikiem Höldera zależnym od* n, p *oraz geometrii* (X, ω).

Analogiczny problem w przypadku obszarów ściśle pseudowypukłych przy odpowiednio regularnych danych brzegowych został rozpatrzony w pracy [GKZ] rozwiązania z prawą strona w L^p są hölderowsko ciągłe przy czym wykładnik Höldera jest szacowany przez $\frac{2}{np/(p-1)+1}$.

Odnotujmy znaczenie geometryczne tego wyniku. W geometrii zespolonej, jak zauważył jeszcze S. T. Yau w pracy [Yau] ważne jest rozpatrywanie metryk singularnych dla których krzywizna Ricciego "skupia się" na zbiorach analitycznych. Z równania (3.4) wynika iż można to osiągnąć rozwiązujac równanie Monge'a-Ampère'a z prawą stroną f która lokalnie jest postaci

$$f = \frac{|\sigma_1(z)|^{a_1} + \cdots + |\sigma_k(z)|^{a_k}}{|\tau_1(z)|^{b_1} + \cdots + |\tau_k(z)|^{b_k}},$$

dla pewnych lokalnych funckji holomorficznych σ_k, τ_j (generujacych wspomniany zbiór analityczny) oraz pewnych wykładników a_i, b_j. Funkcje tego typu (zakładając iż miejsca zerowe i wykładniki zostały dobrane tak aby iloraz miał nietrywialne zera w mianowniku) są oczywiście nieograniczone jednak w konktretnych sytuacjach są one całkowalne z wykładnikiem wyższym niż 1. W tej sytuacji dla geometrii zespolonej fundamentalnym problemem jest zachowanie metryki osobliwej w pobliżu zbioru analitycznego. Metody równań różniczkowych pozwalają ustalić iż metryka jest gładka *poza* osobliwościami jednak nie dają żadnej informacji o zachowaniu *na* najciekawszym zbiorze analitycznym. W tej sytuacji twierdzenie Kołodzieja, jako wynik globalny, pozwala wyjaśnić zachowanie potencjału metryki także na zbiorze osobliwym.

Twierdzenie Kołodzieja zrodziło pytanie o optymalny wykładnik Höldera na rozmaitościach Kählerowskich. W pracy [CMAK3] wykazałem iż tak naprawdę wykładnik ten nie zależy od geometrii rozmaitości dla pewnej ich podklasy:

Twierdzenie 3.8.2. *Niech* (X, ω, f, ψ) *będą jak wyżej. Jeżeli dodatkowo metryka* ω *ma nieujemną ortogonalna krzywiznę bisekcyjną to rozwiązanie* ψ *jest Hölderowsko ciągłe z wykładnikiem* $\alpha = \frac{1}{np/(p-1)+1+\varepsilon}$ *dla każdego* $\varepsilon > 0$.

Warto tu odnotować iż warunek nieujemności ortogonalnej krzywizny bisekcyjnej (czyli krzywizna ta jest nieujemna dla dowolnego dwukierunku rozpiętego przez ortogonalne proste zespolone) jest dość restrykcyjny jednak *nie jest* pustospełniony: w pracy [GuZ] podano charakteryzację takich rozmaitości opierającą się na opisaniu ich przestrzeni nakrywających. Przykładem takich rozmaitości jest iloczyn kartezjański $(\mathbb{P}^1\times C, \omega_{FS}+\omega_{can})$, gdzie $\mathbb{P}^1$ jest jednowymiarową przestrzenią rzutową z metryka Fubini-Study (o krzywiźnie $+2$) a C jest dowolną zwartą zespoloną krzywą genusu $g\geq 2$ wyposażoną w metrykę kanoniczną o stałej krzywiźnie -1.

Ważniejsza w tej pracy od tego częściowego wyniku jest jednak sama metoda: została wykorzystana technika regularyzacyjna Demailly'ego pochodząca z pracy [De]: z grubsza jest to globalny odpowiednik regularyzacji poprzez splot wykorzystująca przestrzeń styczną i odwzorowanie eksponencjalne do zadania lokalnych "przesunięć". Wzór wygląda następująco:

$$\phi_\varepsilon(z):=\int_{\eta\in T_zX}\phi(exp_z(\eta))\tau(\frac{||\eta||^2}{\varepsilon^2})d\eta,$$

gdzie normy brane są względem metryki ω, a τ jest jądrem wygładzającym o nośniku w kuli jednostkowej w $\mathbb{C}^n$.

Warto tu odnotować, że odwzorowanie eksponencjalne niemal nigdy nie jest holomorficzne. Tak więc ω- plurisubharmoniczność uśrednień (ściślej: kontrola błędu) nie wynika tu z faktu iż złożenie odwzorowania holomorficznego z funkcją plurisubharmoniczną jest plurisubharmoniczne.

Nie wdając się w szczegóły dowód opiera się rozumowaniu z [GKZ], które wykorzystuje stabilność rowiązań do porównania w normie L^∞ różnicy regularyzacji funkcji i samej funkcji. W [GKZ] wykorzystano klasyczną regularyzację poprzez splot. We wzorach w [CMAK3] pojawiają sie dodatkowe czynniki zależne od krzywizny metryki które wymuszają ograniczenia z tezy twierdzenia.

Analogiczna technika w połączeniu z *zasadą minimum Kislemana* została wykorzystana w pracy [BD] (praca ta ukazała się na arXiv miesiąc po [CMAK3]).

Technika ta z pewnymi udoskoleniami została wykorzystana do udowodnienia pełnego wyniku: wykładnik Höldera jest niezależny od geometrii rozmaitości bez żadnych dodatkowych warunków. Wykazano to w pracy [CMAK7]. Pracę [CMAK7] z powodu licznych współautorów i trudności z uzyskaniem oswiadczeń o wkładzie zdecydowałem się nie umieszczać w cyklu monotematycznym.

4. Prace spoza cyklu monotematycznego

W rozdziale tym opisane sa pozostałe prace nie wchodzące w skład osiągnięcia naukowego. Zostały one podzielone ze względu na tematykę. Prace [CMAK2, CMAK4, CMAPDE1] zostały wykorzystane w mojej rozprawie doktorskiej. Prace [CMAK1, RBF1, RBF2] pochodzą z okresu poprzedzającego napisanie pracy doktorskiej.

4.1. Geometria algebraiczna. W pracy [AG1] analizowane są geometryczne własności specjalnej klasy zwartych zespolonych rozmaitości zespolonego wymiaru 3. Rozmaitości Fano (czyli takie dla których dywizor antykanoniczny jest *szeroki*) stanowią bardzo specjalną klasę rozmaitości algebraicznych- w szczególności w dowolnym wymiarze istnieje tylko skończona ilość takich obiektów (z dokładnością do dyfeomorfizmu). W zespolonym wymiarze 3 wiadomo, że istnieje 105 takich klas. Jedna z nich (tzw. rozmaitości Mukai) ma wyjątkowo bogatą i skomplikowaną teorię deformacji.

W pracy [AG1] rozważane były rozmaitości Mukai posiadające symetrie- dokładniej te z nich dla których grupa automorfizmów posiada podgrupę $\mathbb{C}^*$. Za pomocą obliczeń komputerowych udało się oszacować niezmienniki dla tychże rozmaitości (tzw. próg log-kanoniczny) oraz znaleźć związek pomiędzy różnymi opisami tych obiektów. Główny wynik pracy polega na znalezieniu dodatkowej symetrii dla każdej takiej rozmaitości. Symetria ta antykomutuje z działaniem $\mathbb{C}^*$ co pozwala udowodnić istnienie metryki Kählera-Einsteina dla *otwartego* podzbioru tychże rozmaitości w przestrzeni je parametryzującej. Podobne wyniki zostały także uzyskane w [RST, LXW] jednak użyte tam metody są znacznie bardziej skomplikowane.

4.2. **Interpolacja funkcjami radialnymi.** W pracach [RBF1, RBF2] badane są teoretyczne aspekty interpolacji za pomocą funkcji radialnych z parametrem. Przy ustalonej z góry funkcji $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (funkcji radialnej) problem interpolacyjny (w $\mathbb{R}^n$) o węzłach w punktach $x_j, j = 1, \cdots, N$ polega na znalezieniu współczynników λ_j dla których funkcja

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \psi(||x - x_j||)$$

spełnia równania $s(x_j) = f_j$ dle pewnego (z góry ustalonego) zestawu danych f_j. Heurystycznie przy dużej liczbie węzłów tak powstała funkcja powinna dobrze aproksymować nieznaną funkcję f którą jesteśmy w stanie tylko *próbkować* (czyli wyliczać jej wartości w węzłach). Występująca we wzorze funkcja ψ ma znaczenie dla dokładności algorytmów numerycznych. Najczęściej wybierane są funkcje typu Gaussowskiego $\psi(r) = exp(-cr^2)$ bądź też tzw. *mulitkwadryki* $\psi(r) = \sqrt{r^2 + C}$.

Problem rozważany w [RBF1, RBF2] dotyczy analizy zachowania funkcji

$$s_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(\epsilon) \psi(\varepsilon ||x - x_j||)$$

ze względu na parametr $\varepsilon \to 0^+$ (czyli przy skalowaniu zmiennej w funkcji radialnej). Z analizy numerycznej wynika, że niektóre współczynniki λ_j muszą w tej sytuacji rozbiegać do nieskończoności (co utrudnia implementacje algorytmów numerycznych) natomiast symulacje numeryczne wskazują iż same funkcje interpolacyjne s_ε zbiegają przy pewnych warunkach do *wielomianów interpolacyjnych* dla węzłów x_j. W pracach tych dowodzone są formalnie powyższe zauważone numerycznie własności.

Są to prace na poziomie doktoranckim, bardzo daleko odbiegające poziomem od pozostałych.

4.3. **Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a.** W pracy [CMAPDE1] badany jest następujący problem: Jeżeli miary Monge'a-Ampère'a dla funkcji u oraz v spełniają nierówności

$$(i\partial\bar{\partial}u)^n \geq \mu, \ (i\partial\bar{\partial}v)^n \geq \mu$$

dla jakiejś miary μ, to czy można oszacować z dołu miarę mieszaną $(i\partial\bar{\partial}u)^k \wedge (i\partial\bar{\partial}u)^{n-k}$? Z punktu widzenia wartości własnych jest to bardzo singularny odpowiednik nierówności między średnią artymetyczną a średnią geometryczną. Uzyskany wynik mówi iż nierówność taką da się znaleźć o ile miara μ znika na zbiorach pluripolarnych. Dokładniej zachodzi wtedy nierówność $(i\partial\bar{\partial}u)^k \wedge (i\partial\bar{\partial}u)^{n-k} \geq \mu$. Warunek znikania na zbiorach pluripolarnuch jest naturalny w teorii pluripotencjału (patrz [Ceg04]) jednak z punktu widzenia teorii miary jest dość dziwny- istnieją bowiem zbiory małego wymiaru Hausdorffa nie będące zbiorami pluripolarnymi (np. $\mathbb{R}^n$ w $\mathbb{C}^n$) oraz istnieją zbiory o znacznie większym wymiarze Hausdorffa (dowolna hiperpłaszczyzna zespolona) które są pluripolarne.

Nierówność ta okazała się bardzo użytecznym narzędziem w teorii pluripotencjału: jest ona podstawowym narzędziem w pracach [CMAK2, CMAK4, CMAK5]. Również inni Autorzy wykorzystują tę nierówność- [BEGZ].

W [CMAPDE4] badane są własności zbiorów w $\mathbb{C}^n$ na których ograniczona funkcja plurisubharmoniczna u spełniająca warunek $(dd^c u)^n \geq 1$ osiąga swoje minimum. Gdyby u była dodatkowo gładka to byłaby ściśle plurisubharmoniczna i właściwa teoria zbiorów minimum jest dobrze poznana. Przy braku regularności uzyskaliśmy optymalne warunki grawantujące nieistnienie analitycznych podzbiorów w zbiorach minimum. Skonstruowane zostały także przykłady zbiorów minimum o dużym wymiarze Hausdorffa.

Swój wkład oceniam na 50 procent.

4.4. **Zespolone równanie Monge'a-Ampère'a na rozmaitościach.** W pracy [CMAK1] badane są *klasy Cegrella* na zwartych rozmaitościach kählerowskich. Są to funkcje potencjalnie nieograniczone z dołu dla których mimo to operator Monge'a-Ampère'a może być poprawnie określony (konstrukcja Bedforda-Taylora miary $(i\partial\bar{\partial}u)^n$ nie wyklucza takiej możliwości, pokazuje jednak iż definiowalność $u(i\partial\bar{\partial}u)^k$ zależy istotnie od geometrii przecięcia nośników miar współczynników $(i\partial\bar{\partial}u)^k$ ze zbiorem na którym u jest nieograniczona). W szczególności wykazana została w tej pracy zasada porównawcza dla funckji z klasy Cegrella: jeżeli u, v są ω plurisubharmoniczne i należą do klasy $\mathcal{E}^p(X,\omega)$ to

$$\int_{\{u<v\}}(\omega+i\partial\bar{\partial}v)^n \leq \int_{\{u<v\}}(\omega+i\partial\bar{\partial}u)^n.$$

W pracy [CMAK2] została udowodniona jedyność rozwiązania modulo stała addytywna dla problemu Dirichleta na zwartej rozmaitości kählerowskiej

$$(\omega+i\partial\bar{\partial}v)^n = d\mu,$$

dla miary μ spełniającej warunek konieczny $\int_X \omega^n = \int_X d\mu$ oraz zerującej się na zbiorach pluripolarnych. Był to wynik rozwiązujący ważny otwarty problem postawiony przez Guedja i Zeriahiego [GZ1]. Stanowił on najistotniejszy element mojej pracy doktorskiej. Wynik ten jak i metoda dowodu została wykorzystana w dalszych badaniach, między innymi w [CMAK4, BEGZ].

W pracy [CMAK4] badałem wraz z Z. Zhangiem stabilność rozwiązań równania Monge'a-Ampère'a na rozmaitościach zespolonych przy założeniu iż prawe strony należą do L^p dla pewnego $p > 1$. Problem stabilności sprowdza się do odpowiedzi na pytanie czy bliskość prawych stron (w sensie L^1 bądź L^p) implikuje bliskość rozwiązań w sensie L^∞. Odpowiedź (twierdząca) na to pytanie polegała na wynalezieniu nierówności kontrolującej normę jednostajną różnicy dwóch rozwiązań za pomocą prawych stron równań. Nierówność ta poprawia oszacowanie Kołodzieja z [Koj02] i jest optymalna co pokazano na przykładzie. Wynik tej pracy okazał się pożytecznym narzędziem do badania regularności problemu Dirichleta- okazało się [CMAK3, CMAK7] iż optymalna stabilność jest kluczowym elementem w dowodzie hölderowskiej ciągłości rozwiązań.

Swój wkład w tą pracę mogę ocenić na 50 procent.

Praca [CMAK5] zawiera techniczne wyniki dotyczące zbieżności miar operatora Monge'a-Ampère'a. Wiadomo bowiem (patrz [Ceg82]) iż słaba zbieżność dla funkcji plurisubharmonicznych u_j do u pociąga za soba zbieżność w L^p_{loc} dla każdego $1 \leq p < \infty$ nie wystarczy to jednak do wykazania zbieżności $(i\partial\bar{\partial}u_j)^n$ w sensie miary do $(i\partial\bar{\partial}u)^n$ (co ciekawe w przypadku rzeczywistego operatora Monge'a-Ampère'a taka słaba ciągłość zachodzi- [Gut]). Kluczowe jest więc znalezienie warunków gwarantujacych takową zbieżność. I tak dla funkcji lokalnie ograniczonych zbieżność zachodzi dla ciągów monotonicznych [BT82] bądź też ciągow zbieżnych względem pojemności [Xi].

W pracy [CMAK5] rozważaliśmy problem w klasie funkcji $\mathcal{E}(X,\omega)$ czyli maksymalnej klasie funkcji ω-plurisubharmonicznych dla których operator Monge'a-Ampère'a jest poprawnie określony ([GZ1]) oraz stosowna miara znika na zbiorach pluripolarnych. Niektóre z uzyskanych wyników stały się użytecznymi narzędziami w powstałej teorii- [GZ2]. Swój wkład w tą pracę mogę ocenić na 50 procent.

Praca [CMAK6] dotyczy równania Monge'a-Ampère'a na zwartych rozmaitościach zespolonych **bez** zakładania kählerowskości. W tym przypadku operator Monge'a-Ampère'a względem formy hermitowskiej definiuje się analogicznie, jednak nie istnieje już lokalny opis w mapach identyfikujacy równanie z klasycznym operatorem w obszarze. Inną istotna różnicą jest brak niezmienniczości pełnej objętości

$$\int_X (\omega + i\partial\bar{\partial}u)^n,$$

gdyż przy używaniu twierdzenia Stokesa dostaniemy dodatkowe wyrazy zależne od $\partial\omega$, $\bar{\partial}\omega$ czy też od $i\partial\bar{\partial}\omega$.

Niemniej sporo z klasycznej teoii pluripotencjału można przenieść na przypadek hermitowski. W pracy tej zdefiniowaliśmy pojemność względem formy hermitowskiej ω oraz wykazalismy nierówności typu Cherna-Levine'a-Nirenberga. Pokazaliśmy także iż zasada porównawcza zachodzi dla ograniczonych funkcji ω-plurisubharmonicznych, jednak sama nierówność musi zawierać pewne dodatkowe wyrazy. Kluczowym wynikiem jest uzyskanie jednostajengo oszacowania a priori dla problemu Dirichleta z prawą stroną w L^p, $p > 1$- jest to wynik uogólniajacy główne twierdzenie uzyskane w [ToW10]. Wspomniane oszacowanie stanowiło problem otwarty od lat 80-tych. Porównując daty ukazania się preprintów na arXiv (praca [ToW10] ukazała się 2 tygodnie przed naszą) można stwierdzić iż zabrakło nam niewiele czasu do rozwiazania jednego z poważnych problemów w analizie na rozmaitościach hermitowskich.

Dalsze uogólnienia wyników tej pracy zostały zawarte w [KN1, KN2] Swój wkład ocieniam na 50 procent.

Praca [CMAK7] w pełni rozwiązuje problem postawiony w [Koj05] i badany w [CMAK3]: czy optymalny wykładnik Höldera dla rozwiązania równania

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\psi)^n = f\omega^n$$

przy $0 \leq f \in L^p(\omega^n)$ dla ustalonego $p > 1$ zależy od geometrii rozpatrywanej rozmaitości (X,ω). Odpowiedź jest następująca: niezależnie od rozmaitości wykładnik zawsze można oszacować przez $\frac{2}{np/(p-1)+1}$. Co więcej współczynnik w oszacowaniu normy Höldera jest stabilny przy perturbacji formy kählerowskiej pod warunkiem jednostajnej kontroli krzywizny bisekcyjnej sperturbowanych metryk.

Rozpatrywany był także przypadek równania względem *dużej* klasy kohomologii. Równanie w tej sytuacji wygląda następujaco:

$$(\theta + i\partial\bar{\partial}\psi)^n = fdV,$$

gdzie θ jest zamnkiętą $(1,1)$ formą (niekoniecznie dodatnią!) której klasa kohomologii $[\theta]$ w sensie de Rhama zawiera silnie dodatni prąd. Innymi słowy $[\theta] = [T]$ dla pewnego prądu T spełniającego $T \geq \varepsilon\omega$ dla jakiejś dodatniej formy hermitowskiej ω oraz pewnego $\varepsilon > 0$. Przykłady takich klas można znaleźć w pracy [BEGZ]- stanowią one analityczny odpowiednik pojęcia dużej wiązki liniowej bądź dużego dywizora z geometrii algebraicznej.

Kluczowym w pracy jest połączenie techniki regularyzacyjnej Demailly'ego, zainicjowanej w [CMAK3], optymalnych twierdzeń o stabilności ([CMAK4]) oraz zasady minimum pochodzącej od Kiselmana. Brak ostatniego skladnika był właśnie elementem który wymusił w pracy [CMAK3] założenia geometryczne o nieumjemności krzywizny.

Wynik ten rozwiązał ostatecznie istotny problem w teorii pluripotencjału. Ze względu na liczbę współautorów i trudności z uzyskaniem oświadczeń o wkładzie procentowym nie został on dołączony do cyklu monotematycznego, gdzie został on zastąpiony pracą [CMAK3].

Mój wkład w tą prace jest dość trudny do oceny, gdyż wyniki zostały uzyskane niezależnie przez 2 grupy badawcze (J. P. Demailly, S. D., S. Kołodziej oraz odpowiednio V. Guedj, P.H. Hiep i A. Zeriahi), które połączyły siły na późnym etapie powstawania manuskryptu. Tak więc w zależnosci od oceny stopnia niezależności tych grup wkład wahałby się między 17 procent a 33 procent.

Praca [CMAK8] ma przeglądowy charakter i zawiera wyniki dotyczące rozwiniętej teorii pluripotencjału w przypadku zwartych rozmaitości hermitowskich. Praca ta bazuje na [CMAK6] oraz [KN1], [KN2]. Manuskrypt nie zawiera nowych wyników.

Praca [CMAK9] jest zbiorem otwartych problemów z teorii pluripotencjału na rozmaitościach kählerowskich i hermitowskich. Problemy te zostały zebrane i opracowane wraz z V. Guedjem oraz A. Zeriahim.

4.5. **Równania Hessjanowe.** W pracy [Hess2] rozpatrywany jest problem jedyności rozwiązań równania Hessjanu

$$(\omega + dd^c u)^m \wedge \omega^{n-m} = d\mu$$

na zwartej rozmaitości kählerowskiej (X, ω). W powyższym równaniu $1 \leq m < n$ (przypadek równania Monge'a-Ampère'a $m = n$ został rozpatrzony w [CMAK2]), a μ jest miarą probabilistyczną na X spełniającą warunek znikania na zbiorach m-polarnych. Oznacza to iż dla dowolnego zbioru borelowskiego $K \subset X$ takiego, że istnieje funkcja $\omega - m$-subharmoniczna v spełaniająca warunek

$$K \subset \{z \in X \mid v(z) = -\infty\}$$

musi zachodzić równość $\mu(K) = 0$.

Aby równanie to miało rozwiązanie musi być spełniony warunek normalizacyjny $\int_X \omega^n = \int_X d\mu = 1$. Przy jego założeniu oraz pod warunkiem znikania miary na zbiorach m-polarnych istnienie rozwiązania u zostało rozwiązane w [LN]. Problem jedyności rozwiązania (modulo stała addytywna) został postawiony w [LN]. W omawianej pracy znalazł on kompletne pozytywne rozwiązanie.

Praca ta ma charakter wtórny w stosunku do [CMAK2] oraz [CMAPDE1] gdyż okazało się iż metody opracowane w tychże pracach dają się przenieść automatyczne na przypadek równania Hessjanu. Jedyną wartością dodaną tej pracy jest znaczne uproszczenie metod dowodzenia nierówności dla miar mieszanych pochodzących z [CMAPDE1].

Literatura

[CMAPDE4] Dinew Sławomir; Dinew Żywomir; The minimum sets and free boundaries of strictly plurisubharmonic functions Calc. Var. PDE 55 (2016), 17 p.

[CMAK9] Dinew, Slawomir; Guedj, Vincent; Zeriahi Ahmed; Open problems in pluripotential theory, Complex Var. Elliptic Equations 61 (2016), 902-930. .

[AG1] Dinew, Slawomir; Kapustka, Grzegorz; Kapustka, Michal; Remarks on Mukai threefolds admitting $\mathbb{C}^*$ action, Moscow Math. J. 17 (2017), 15-33.

[Hess3] Dinew, Slawomir; Kolodziej Slawomir; Liouville and Calabi-Yau type theorems for complex hessian equations, Amer. J. Math. 139 (2017) no. 2, 403-415..

[CMAK8] Dinew, Sławomir; Pluripotential theory on compact Hermitian manifolds. Ann. Fac.Sci. Toulouse Math. 25 (2016), no. 1, 91-139.

[Hess2] Dinew, Sławomir; Lu, Chinh H.; Mixed Hessian inequalities and uniqueness in the class $E(X, \omega, m)$. Math. Z. 279 (2015), no. 3-4, 753-766.

[Hess1] Dinew, Sławomir; Kołodziej, Sławomir; A priori estimates for complex Hessian equations. Anal. PDE 7 (2014), no. 1, 227-244.

[CMAK7] Demailly, Jean-Pierre; Dinew, Sławomir; Guedj, Vincent; Pham, Hoang Hiep; Kołodziej, Sławomir; Zeriahi, Ahmed; Hölder continuous solutions to Monge-Ampere equations. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 16 (2014), no. 4, 619-647.

[CMAK6] Dinew, Sławomir; Kołodziej, Sławomir; Pluripotential estimates on compact Hermitian manifolds. Advances in geometric analysis, 69-86, Adv. Lect. Math. (ALM), 21, Int. Press, Somerville, MA, 2012.

[CMAK5] Dinew, Sławomir; Pham Hoang Hiep; Convergence in capacity on compact Kähler manifolds. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 11 (2012), no. 4, 903-919.

[CMAPDE3] Dinew, Sławomir; Zhang, Xi; Zhang, Xiangwen; The $C^{2,\alpha}$ estimate of complex Monge-Ampere equation. Indiana Univ. Math. J. 60 (2011), no. 5, 1713-1722.

[CMAPDE2] Błocki, Zbigniew; Dinew, Sławomir; A local regularity of the complex Monge-Ampere equation. Math. Ann. 351 (2011), no. 2, 411-416.

[CMAK4] Dinew, Sławomir; Zhang, Zhou; On stability and continuity of bounded solutions of degenerate complex Monge-Ampere equations over compact Kähler manifolds. Adv. Math. 225 (2010), no. 1, 367-388.

[CMAK3] Dinew, Sławomir; Hölder continuous potentials on manifolds with partially positive curvature. J. Inst. Math. Jussieu 9 (2010), no. 4, 705-718.

[RBF2] Buhmann, Martin D.; Dinew, Sławomir; Larsson, Elisabeth; A note on radial basis function interpolant limits. IMA J. Numer. Anal. 30 (2010), no. 2, 543-554.

[CMAPDE1] Dinew, Sławomir; An inequality for mixed Monge-Ampere measures. Math. Z. 262 (2009), no. 1, 1-15.

[CMAK2] Dinew, Sławomir; Uniqueness in $E(X, \omega)$. J. Funct. Anal. 256 (2009), no. 7, 2113-2122.

[CMAK1] Dinew, Sławomir; Cegrell classes on compact Kähler manifolds. Ann. Polon. Math. 91 (2007), no. 2-3, 179-195.

[RBF1] Buhmann, Martin D.; Dinew, Sławomir; Limits of radial basis function interpolants. Commun. Pure Appl. Anal. 6 (2007), no. 3, 569-585.

Pozostała Literatura

Literatura

[AG] Andreotti, A.; Grauert, H. Théorème de finitude pour la cohomologie des espaces complexes. (French) Bull. Soc. Math. France 90 1962 193-259.

[BD] Berman, R.; Demailly, J. P. Regularity of plurisubharmonic upper envelopes in big cohomology classes. Perspectives in analysis, geometry, and topology, 39-66, Progr. Math., 296, Birkhäuser/Springer, New York, 2012.

[Bl99] Z.Błocki: On the regularity of the complex Monge-Ampère operator, Complex Geometric Analysis in Pohang, 1997, 181-189 Contemp. Math., 222, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[Bl00] Błocki Z., Interior regularity of the complex Monge-Ampère equation in convex domains. Duke Math. J. 105 (2000), no. 1, 167-181.

[Bl05] Błocki Z., Weak solutions to the complex Hessian equation, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), no. 5, 1735-1756.

[Bl09] Błocki Z., A gradient estimate in the Calabi-Yau theorem. Math. Ann. 344 (2009), no. 2, 317-327.

[BEGZ] Boucksom, S.; Eyssidieux, P.; Guedj, V.; Zeriahi, A. Monge-Ampère equations in big cohomology classes. Acta Math. 205 (2010), no. 2, 199-262.

[BT76] Bedford E. and Taylor B.A., *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère operator*, Invent. Math. **37** (1976), 1-44.

[BT82] Bedford E. and Taylor B. A.: A new capacity for plurisubharmonic functions. Acta Math. **149** (1982), no. 1-2,1-40.

[Caf1] Caffarelli, Luis A. Interior $W^{2,p}$ estimates for solutions of the Monge-Ampére equation. Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 1, 135-150.

[CKNS] Caffarelli L., Kohn J. J., Nirenberg L., Spruck J.: The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations II. Complex Monge-Ampère, and uniformly elliptic, equations. Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), no. 2, 209–252.

[Ceg82] Cegrell, U. Discontinuité de l'opérateur de Monge-Ampère complexe. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 296 (1983), no. 21, 869-871.

[Ceg04] Cegrell, U. The general definition of the complex Monge-Ampère operator. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 54 (2004), no. 1, 159-179.

[De] Demailly J.-P., Regularization of closed positive currents of type (1, 1) by the flow of a Chern connection, Aspects of Mathematics, Volume E26, pp. 105-126.

[DF] Diederich, K.; Fornaess, J. E. Smoothing q-convex functions and vanishing theorems. Invent. Math. 82 (1985), no. 2, 291-305.

[GKZ] Guedj, V.; Kolodziej, S.; Zeriahi, A. Hölder continuous solutions to Monge-Ampère equations. Bull. Lond. Math. Soc. 40 (2008), no. 6, 1070-1080.

[GZ1] Guedj, V.; Zeriahi, A. The weighted Monge-Ampère energy of quasiplurisubharmonic functions. J. Funct. Anal. 250 (2007), no. 2, 442-482.

[GZ2] Guedj, V.; Zeriahi, A. Stability of solutions to complex Monge-Ampère equations in big cohomology classes. Math. Res. Lett. 19 (2012), no. 5, 1025-1042.

[GT] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. Elliptic partial differential equations of second order. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 224. Springer-Verlag, Berlin, 1983. 513 pp.

[Gut] Gutierrez, Cristian E. The Monge-Ampere equation. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 44. Birkhüser Boston, Inc., Boston, MA, 2001. 127 pp.

[GuZ] Gu, H.; Zhang, Z. An extension of Mok's theorem on the generalized Frankel conjecture. Sci. China Math. 53 (2010), no. 5, 1253-1264.

[He] He, W. On the regularity of the complex Monge-Ampère equations. Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), no. 5, 1719-1727.

[HMW] Hou, Z.; Ma, X.-N.; Wu, D. A second order estimate for complex Hessian equations on a compact Kähler manifold. Math. Res. Lett. 17 (2010), no. 3, 547-561.

[Koj98] Kołodziej S.: The complex Monge-Ampère equation. Acta Math. **180** (1998), no. 1, 69-117.

[Koj02] Kołodziej S., The Monge-Ampère equation on compact Kähler manifolds. Indiana Univ. Math. J. 52 (2003), no. 3, 667-686.

[Koj05] Kołodziej S.: Hölder continuity of solutions to the complex Monge-Ampère equation with the right-hand side in L^p: the case of compact Kähler manifolds. Math. Ann. 342 (2008), no. 2, 379-386.

[KN1] Kołodziej, S.; Nguyen N. C. Weak solutions to the complex Monge-Ampère equation on Hermitian manifolds. Analysis, complex geometry, and mathematical physics: in honor of Duong H. Phong, 141-158, Contemp. Math., 644, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[KN2] Kołodziej, S.; Nguyen N. C. Stability and regularity of solutions of the Monge-Ampère equation on Hermitian manifolds, preprint arXiv:1501.05749.

[Li] Li S.-Y., On the Dirichlet problems for symmetric function equations of the eigenvalues of the complex Hessian, Asian J. Math. 8 (2004),no. 1, 87-106.

[LXW] Li, Ch., Xu Ch., Wang X. Degeneration of Fano Kahler-Einstein manifolds preprint arXiv:1411.0761

[Lu] Lu, Ch. H. A variational approach to complex Hessian equations in $\mathbb{C}^n$. J. Math. Anal. Appl. 431 (2015), no. 1, 228-259.

[LN] Lu, H.C., Nguyen, V.D.: Degenerate complex Hessian equations on compact Kähler manifolds. Indiana Univ. Math. J. (to appear). arXiv:1402.5147.

[N] Nguyen, N. C. Hölder continuous solutions to complex Hessian equations. Potential Anal. 41 (2014), no. 3, 887?902.

[PPZ] D. H. Phong, S. Picard, X. Zhang: On estimates for the Fu-Yau generalization of a Strominger system preprint arXiv:1507.08193.

[Pog] Pogorelov A.V.: A regular solution of the n-dimensional Minkowski problem. Dokl. Akad. Nauk SSSR 199 785-788 (Russian); translated in Soviet Math. Dokl. 12 1971 1192-1196.

[RST] Rollin, Y.; Simanca, S.; Tipler, C. Deformation of extremal metrics, complex manifolds and the relative Futaki invariant. Math. Z. 273 (2013), no. 1-2, 547-568.

[SA] Sadullaev, A.; Abdullaev, B. Potential theory in the class of m-subharmonic functions. (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova 279 (2012), Analiticheskie i Geometricheskie Voprosy Kompleksnogo Analiza, 166-192.

[Si] Y.-T. Siu: Lectures on Hermitian-Einstein metrics for stable bundles and Kähler-Einstein metrics Birkhäuser, 1987.

[Sz] Székelyhidi G., Fully non-linear elliptic equations on compact Hermitian manifolds, preprint arXiv 1501.02762,

[STW] Székelyhidi G., Tosatti V., Weinkove B.: Gauduchon metrics with prescribed volume form, preprint arXiv:1503.04491.

[T] Tian, G.: Canonical metrics in Kähler geometry, Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000. 101 pp.

[Tr] Trudinger N.S.: Local estimates for subsolutions and supersolutions of general second order elliptic quasilinear equations. Invent. Math. (61) (1980), 67-79.

[TW1] Trudinger N.S. and Wang X.-J., Hessian measures, II, Ann. of Math. (2) (1999), 579-604.

[ToW10] Tosatti V., Weinkove, B. The complex Monge-Ampère equation on compact Hermitian manifolds. J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 4, 1187-1195.

[ToW13] V. Tosatti, B. Weinkove, Hermitian metrics, $(n-1, n-1)$ forms and Monge-Ampère equations, preprint arXiv 1310.6326.

[Ur1] Urbas, J. Regularity of generalized solutions of Monge-Ampère equations. Math. Z. 197 (1988), no. 3, 365-393.

[Ur2] Urbas, J. An approximation result for solutions of Hessian equations. Calc. Var. PDE 29 (2007), no. 2, 219-230.

[WW] D. Wan, W. Wang: Complex Hessian Operator and Lelong Number for Unbounded m-subharmonic Functions, Potential Analysis (to appear)

[Wan1] Wang X.-J., *Schauder estimates for elliptic and parabolic equations,* Chin. Ann. Math. (B) **27** (2006)(2), 637-642.

[Wan2] Wang X.-J., The k-Hessian equation, Lecture Notes in Math., 1977, Springer, Dordrecht, 2009.

[Wa1] Wang, Yu: A viscosity approach to the Dirichlet problem for complex Monge-Ampère equations. Math. Z. 272 (2012), no. 1-2, 497-513.

[Wa2] Wang, Yu: On the $C^{2,\alpha}$-regularity of the complex Monge-Ampère equation. Math. Res. Lett. 19 (2012), no. 4, 939-946.

[Xi] Xing, Y. Continuity of the complex Monge-Ampère operator. Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), no. 2, 457-467.

[Yau] Yau S.T.: On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), no. 3, 339-411.