dr hab. Agnieszka Kałamajska, prof. UW
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa
adres e-mail: kalamajs@mimuw.edu.pl

Warszawa, 15 lipca 2016

Ocena rozprawy doktorskiej
pt. "History-Dependent Nonlinear Inclusions and Variational-Hemivariational Inequalities with Applications to Contact Mechanics"
Pani mgr. Justyny Ogorzały

1 Wstępne informacje

Praca pani Justyny Ogorzały napisana pod kierunkiem pani dr. hab. Anny Ochal dotyczy zagadnień opisujących zjawiska mechaniki kontaktowej uwzględniających pewien operator nielokalny, tak zwany operator zależności od historii stanu do momentu t.

Tematyka zagadnień kontaktowych interesuje matematyków od końca XIX wieku (praca Hartza), natomiast intensywne badania zjawisk z uwzględnieniem zależności od historii są prowadzone intensywnie przez współczesnych matematyków, m. innymi przez Sofonea, Matei, Hahna, Migórskiego, promotor pracy, Farcasa i współpracowników. Tego typu modele opisują nie tylko zjawiska kontaktowe, lecz także zjawiska w sieciach elektrycznych, hydraulicznych, pneumatycznych oraz w procesach chemicznych. Jest to zatem tematyka interesująca także inżynierów i fizyków, o potencjalnym zastosowaniu w przemyśle.

Równocześnie stanowi ona ciekawe wyzwanie od strony matematycznej. Zagadnienia kontaktowe opisane są ogólnie przez system złożonych równań cząstkowych, na które składają się prawa zachowania dla ciał sprężystych (lub lepko-sprężystych), równanie stanu oraz różnego typu warunki brzegowo-początkowe. Opis matematyczny tego typu modeli dokonuje się w przestrzeniach Banacha typu $L^p((0,T),X)$, gdzie X jest przestrzenią typu Sobolewa powiązaną z operatorem diwergencji. W tych przestrzeniach formułuje się nierówności hemiwariacyjne, które stanowią warunek równoważny rozwiązalności dla wyjściowego równania. Następnie z pomocą odpowiedniego twierdzenia o punkcie stałym dowodzi się istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań.

Niniejsza rozprawa stosuje taki schemat w odniesieniu do zjawisk kontaktowych z uwzględnieniem przeszłości materiału. Przeprowadzoną analizę uważam za żmudną od strony technicznej, wymagającą dużej pracowitości i czasu, oraz znajomości zarówno fizyki jak i abstrakcyjnego aparatu analizy funkcjonalnej. Rozprawa opiera się na czterech pracach samodzielnych, fragmentach niepublikowanych, oraz na dwóch artykułach napisanych wspólnie z prof. Stanisławem Migórskim. Jest to dorobek bogaty jak na doktoranta. Wyniki przedstawione są w sposób konsekwentny i ciekawy.

A. Kał

2 Omówienie rozprawy doktorskiej

2.1 Organizacja pracy oraz źródła

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów głównych, rozdziału zawierającego uzupełnienia oraz obszernej bibliografii. Pierwszy rozdział ma charakter wstępny, drugi to wprowadzenie do teorii abstrakcyjnej która będzie kluczowym narzędziem do badania zagadnień kontaktowych z zależnością od historii. Rozdział trzeci wprowadza czytelnika w zagadnienia związane z modelowaniem zjawisk kontaktowych, omawia różnego typu prawa zachowania od strony matematycznej i fizycznej (np. prawo zachowania dla materiałów lepko-spreżystych z krótką i długą pamięcią, prawo zachowania dla materiałów lepkoplastycznych) oraz warunki kontaktowe. W rozdziale czwartym przeanalizowane są konkretne równania opisujące zjawiska kontaktowe. Choć ich opis jest bardzo skomplikowany, jest on równocześnie w pełni umotywowany informacjami z poprzedniego rozdziału, bowiem równania dotyczą omawianych wcześniej modeli. Rozdział ten wykorzystuje abstrakcyjne narzędzia z rozdziału drugiego do dowodu istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązań.

Rozprawa opiera się na czterech pracach samodzielnych Autorki (w tym jednej nie ukończonej):

[1] J. Ogorzały, Quasistatic bilateral contact problem with time delay for viscoelastic materials, Mathematics and Mechanics of Solids, DOI 10.1177/1081286514552208, 2014,

[2] J. Ogorzały, A dynamic contact problem with history-dependent operators, Journal of Elasticity, DOI 10.1007/s10659-015-9563-0, 2016,

[3] J. Ogorzały, Dynamic contact problem with thermal effect, Georgian Mathematical Journal, 2016, praca przyjęta do druku,

[4] J. Ogorzały, A quasistatic contact problem with unilateral constraint and history-dependent operators , praca w przygotowaniu,

oraz na dwóch pracach napisanych wspólnie z profesorem Migórskim:

[5] J. Ogorzały, S. Migórski, Dynamic history-dependent variational-hemivariational inequalities with applications to contact mechanics, praca przesłana do czasopisma,

[6] J. Ogorzały, S. Migórski, A Class of Evolution Variational Inequalities with Memory and its Application to Viscoelastic Frictional Contact Problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2016, praca w druku.

Rozdziały zredagowane są w sposób spójny i interesujący. Mam jednak pewne uwagi krytyczne. Mile by był widziany oddzielny rozdział zawierający odnośniki do używanych oznaczeń. Niektóre fragmenty dowodów zamiast odnośnika zawierającego numer pozycji w bibliografii (często bez podania stron) powinny zostać przedstawione w sposób kompletny w rozdziale zawierającym uzupełnienia. Ze względu na obszerność rozprawy, sugerowałabym, aby rozdział czwarty opierał się na mniejszej liczbie publikacji, w zamian za większy wkład pracy włożony w przedstawienie kompletnych argumentów. Na przykład zwroty: "cf Prop. 3.23 (ii) of [54])", "by applying Lemma 10 in [43]" na str. 64, lub też "from the proof of Theorem 14.2 of [50]", "we refer to Theorem 2.18 of [49]" na str. 76 powinny zostać sformułowane wraz z dowodami.

A. Kut

2.2 Główne wyniki, narzędzia pracy

Za najciekawsze i najtrudniejsze osiągnięcie rozprawy uważam te zamieszczone w rozdziale czwartym. Rozdział ten zawiera zasadniczo cztery wyniki, mianowicie istnienie, jednoznaczność i regularność dla zagadnień:
- z warunkiem kontaktowym qusistatycznym dla materiałów sprężysto-lepko-plastycznych ze standardowym tłumieniem,

oraz z warunkiem kontaktowym dynamicznym dla materiałów lepko-sprężystych:
- z uwzględnieniem poślizgu,
- ze standardowym tłumieniem i suchym tarciem,
- standardowymi warunkami zgodności, czynnikiem pamięci i suchym tarciem.

Przykładowo, klasycznym sformułowaniem zagadnienia kontaktowego dla materiałów sprężystych, lepko-sprężystych i lepko-plastycznych jest ogólne równanie całkowe typu ewolucyjnego:

$$\sigma(t) = \mathcal{A}(t, \epsilon(u^{'}(t))) + \mathcal{B}(t, \epsilon(u(t))) + \int_0^t \mathcal{K}(t-s, \epsilon(u^{'}(s)))ds,$$

natomiast warunek kontaktowy typu dynamicznego czytamy jako:

$$u^{''}(t) - \mathrm{div}\sigma(t) = f_0(t).$$

Nieznane jest pole odkształcenia u oraz pole naprążeń σ (pomijam szczegółowe wyjaśnienia). Zakłada się, że operator $\mathcal{A}$ spełnia pewne warunki typu silnej monotoniczności ze względu na ostanią zmienną a jeden z warunków brzegowych ma charakter nieliniowej inkluzji różniczkowej typu Neumana:

$$-\sigma_\nu(t) \in \partial j_\nu(t, u_\nu^{'}(t)),$$

gdzie $\partial\sigma$ jest podróżniczką w sensie Clarke'go.

Istnienie rozwiązań sprowadza się do dowodu istnienia dla pewnego typu nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnej z zadanym warunkiem początkowym (Problemu 68). Po wykonaniu szeregu oszacowań appriori sprawdza się założenia abstrakcyjnego Twierdzenia 43 z rozdziału 2, które pozwala dowodzić istnienie i jednoznaczność dla ogólnych zagadnień ewolucyjnych mających postać nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnych. Twierdzenie to jest podstawowym narzędziem do dowodzenia istnienia i jednoznaczności dla tego typu zagadnień i korzysta z twierdzenia o punkcie stałym. Analiza wymaga sprawdzania zawiłych warunków technicznych. Dołączona jest dyskusja regularności rozwiązań. Podobny styl mają pozostałe podrozdziały. Pojawia się także dyskusja poprawnego postawienia dla analizowanego zagadnienia ze względu na zaburzenie danych w definicji operatora (np. Twierdzenie 61). Jest to bardzo istotne pytanie z punktu widzenia zastosowań.

Przedstawinoą analizę uważam za prawidłową, trudną od strony technicznej i wymagającą wiedzy. Głównymi technikami są nierówności hemiwariacyjne, odpowiednie twierdzenie o punkcie stałym, operatory monotoniczne i ich uogólnienia, przekształcenia wielowartościowe, analiza wypukła, oraz potrzebne na każdym kroku oszacowania appriori.

Mam jednak drobne uwagi. Znalazłam literówki, np.:
- zamiast "Now we prove property (2.10)(f)" powinno być "Now we prove property (2.10)(e)" (podpunktu (f) nie ma),

A. Kos[illegible]

- zamiast wyrażenia "$\alpha\|u\|_V^2 - \bar{\alpha}_1\|u\|_V - \bar{\alpha}_0(t)\|u_0\|_V$" w linijce 13 od góry na str. 55, powinno znaleźć się wyrażenie "$\alpha\|u\|_V^2 - (\bar{\alpha}_1\|u\|_V + \bar{\alpha}_0(t))\|u_0\|_V$",
- na str. 22, w linijce 13 i 14 od dołu fragment rozumowania zawiera drobny błąd, mianowicie zamiast "z nierówności $x^2 \leq ax + b$ wynika nierówność $x^2 \leq a^2 + b$" powinno być "z nierówności $x^2 \leq ax + b$ wynika nierówność $x^2 \leq a^2 + 2b$" (podstawiając $a = \frac{1}{2}x$, $b = \frac{1}{2}x^2$ otrzymujemy kontrprzykład). Konsekwentnie, niektóre przedstawione na str 22 oszacowania wymagają drobnej korekty, która merytorycznie nie zmienia wyniku.

Wszystkie wymienione drobne literówki nie wpływają na wynik merytoryczny i można je bardzo łatwo poprawić.

3 Konkluzja

Podjętą tematykę uważam całościowo za trudną, szczególnie od strony technicznej, złożoną od strony merytorycznej a samą rozprawę za solidną.

Biorąc pod uwagę dokonane osiągnięcie, po przedstawieniu zarówno pozytywnych jak i negatywnych aspektów oceny, z pełnym przekonaniem stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska spełnia wymagania zwyczajowe i ustawowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie pani mgr. Justyny Ogorzały do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z wyrazami szacunku,

Agnieszka Kałamajska

Agnieszka Kałamajska

A. Kał