prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska
ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa

Warszawa 31 sierpnia 2016

Recenzja rozprawy doktorskiej

History-dependent nonlinear inclusions and variational-hemivariational inequalities with applications to contact mechanics

autorstwa pani magister *Justyny Ogorzały*

Pani magister *Justyna Ogorzały* w przedstawionej rozprawie doktorskiej stosuje techniki nieliniowych nierówności hemiwariacyjnych oraz nieliniowych inkluzji różniczkowych do analizy zagadnień brzegowo-początkowych w mechanice ośrodków niesprężystych. Autorka rozprawy zakłada, że brzeg rozważanego ośrodka składa się z trzech części. Pierwsza z nich (Γ_1) jest na stałe zamocowana (jednorodny warunek brzegowy typu Dirichleta), na drugiej części brzegu (Γ_2) zadane są siły działające na rozważany materiał (warunek brzegowy typu Neumanna), a trzecia część (Γ_3) opisuje kontakt ośrodka z podłożem. Warunki kontaktu rozważane w rozprawie są w postaci zadanej relacji pomiędzy naprężeniem i prędkością przemieszczenia. Autorka oddzielnie rozważa warunki opisujące składową normalną wektora naprężenia na Γ_3 (warunki deformacji podłoża) i warunki na składową styczną wektora naprężenia (warunki tarcia). Podstawową trudnością techniczną występującą w tego typu zagadnieniach jest zapewnienie odpowiedniej regularności wektora prędkości przemieszczenia tak aby ślad tego wektora na brzegu Γ_3 był dobrze określony.

W rozprawie rozważa się 4 różne zagadnienia. Jedno quasistatyczne i trzy dynamiczne. Zagadnienia dynamiczne rożnią się między sobą warunkami kontaktu. W każdym rozważanym zagadnieniu metoda postępowania jest podobna tzn. polega na sprowadzeniu problemu początkowo-brzegowego do pewnej abstrakcyjnej nierówności wariacyjnej lub hemivariacyjnej, ktorej rozwiązywalność została już zbadana wcześniej. Wyniki uzyskane przy analizie zagadnień dynamicznych zawarte w rozprawie zostały już opublikowane w dobrych czasopismach (JMAA, JE, MMS) natomiast część rozprawy dotycząca zagadnienia quasistatycznego jest (zgodnie z deklaracją zawartą w rozprawie) przygotowywana do druku. Cała rozprawa składa się ze wstępu i 4 rozdziałów. We wstępie omówiono stan literatury dotyczącej tematyki rozprawy oraz przedstawiono krótko zawartość rozprawy. Moim zdaniem, zbyt lakonicznie podkreślono istotny wkład autorki w rozwój teorii zagadnień kontaktowych mechaniki ośrodka niesprężystego.

Przechodzę teraz do omówienia zawartości poszczególnych rozdziałów rozprawy.

Rozdział pierwszy zawiera podstawowe definicje i fakty wykorzystywane w rozprawie. Wprowadzono definicję typu operatora zależnego od historii argumentu. Operatory tego typu odgrywają w rozprawie kluczową rolę.

Rozdział drugi jest najważniejszym w rozprawie rozdziałem. Zawiera twierdzenia o rozwiązywalności i o stabilności abstrakcyjnych nierówności wariacyjnych lub hemiwariacyjnych oraz pewnych nieliniowych inkluzji różniczkowych. Rozdział ten składa się z trzech podrozdziałów. Pierwszy z nich przedstawia analizę problemu quasistatycznego postaci: V, X refleksywne i ośrodkowe przestrzenie Banacha,

znaleźć funkcję $u \in L^2(V)$ taką, że $u(t) \in K$ ($K \subset V$ zwarty i domknięty) oraz

$$\begin{aligned}\langle A(t,u(t)), v-u(t)\rangle + \varphi(u(t),v) - \varphi(u(t),u(t))\\ +J^0(t, Mu(t); M(v-u(t))) \geq \langle f(t), v-u(t)\rangle\end{aligned}$$

dla wszystkich $v \in K$ oraz prawie wszystkich $t \in (0,T)$. Operator A jest funkcją Caratheodory'ego o wartościach w V^*, ściśle monotoniczną i koercytywną oraz spełniającą co najwyżej liniowy warunek wzrostu względem drugiej zmiennej. J^0 jest uogólnioną pochodną kierunkową w sensie Clarke'a funkcjonału $J : (0,T) \times X \to R$. J jest mierzalny względem pierwszej zmiennej, lokalnie lipszicowski względem drugiej zmiennej oraz uogólniony gradient spełnia co najwyżej liniowy warunek wzrostu. $\varphi : K \times K \to R$ jest funkcją wypukłą i półciągłą dolnie względem drugiej zmiennej spełniającą

$$\varphi(u_1, v_2) - \varphi(u_1, v_1) + \varphi(u_2, v_1) - \varphi(u_2, v_2) \leq \alpha_\varphi \|u_1 - u_2\| \|v_1 - v_2\|$$

dla dowolnych $u_1, u_2, v_1, v_2 \in K$. Warunek ten narzuca co najwyżej liniowy wzrost φ przy ustalonej jednej zmiennej. Ponadto $M : V \to X$ jest liniowym operatorem zwartym i f jest zadaną funkcją. Główny wynik tego podrozdziału to jednoznaczna rowiązywalność rozważanego zagadnienia przy pewnych dodatkowych, (moim zdaniem) technicznych założeniach na dane. Główna idea dowodu to zamrożenie czasu i skorzystanie z istniejącego już w literaturze twierdzenia przy ustalonym czasie. Zostało sprawdzić, że tak zdefiniowana funkcja czasu jest odpowiednio regularna co wcale nie było trywialną częścią dowodu. Podrozdział ten zawiera jeszcze jeden wynik, w którym zamiast funkcji φ występuje funkcja $\tilde{\varphi}$ zależna od trzech zmiennych, spleciona w pierwszej zmiennej z operatorem $\mathcal{S}$ typu operatora zależnego od historii. Ponadto $\tilde{\varphi}$ spełnia podobne założenia do φ. Twierdzenie o jednoznacznej rozwiązywalności nowego problemu uzyskano techniką, która jest charakterystyczna dla tej rozprawy tzn. zamrożono wartość operatora $\mathcal{S}$ i stosując poprzedni wynik uzyskano operator $\eta \to \mathcal{S}u_\eta$. Pozostało pokazać, ze operator ten ma dokładnie jeden punkt stały. To się udaje dzięki własności operatora typu zależnego od historii.

Drugi podrozdział rozważa abstrakcyjne inkluzje różniczkowe pierwszego rzędu postaci:

$$u'(t) + A(t, u(t)) + (\mathcal{S}u)(t) + F(t, (\mathcal{R}u)(t), u(t)) \ni f(t)$$

dla prawie wszystkich $t \in (0,T)$ oraz $u(0) = v_0$. Operator A spełnia podobne założenia jak w poprzednim podrozdziale tylko ciągłość względem drugiej zmiennej zastąpiono hemiciągłością. Nieniliowa i wielowartościowa funkcja F jest mierzalna względem pierwszej zmiennej i półciągła górnie względem pozostałych zmiennych. Ponadto F względem istotnych zmiennych spełnia co najwyżej liniowy warunek wzrostu oraz pewną uogólnioną nierówność typu monotonicznego. Ponadto $\mathcal{S}, \mathcal{R}$ to operatory typu operatora zależnego od historii argumentu. Jednoznaczną rozwiązywalność takiego typu inkluzji uzyskano stosując metodę podobną do opisanej wyżej tzn. zamrożono wartości operatorów $\mathcal{S}, \mathcal{R}$ i uzyskano inkluzję różniczkową, do której można już było zastosować istniejące w literaturze narzędzie. Następnie wykazano, że powstały w ten sposób operator ma dokładnie jeden punkt stały. Podrozdział drugi zamyka wynik o stabilności rozważanych inkluzji. Założono, że rozważamy jednoparametrową rodzinę rozważanych powyżej inkluzji, gdzie zmieniają się operatory A_ρ, $\mathcal{S}_\rho$, $\mathcal{R}_\rho$, funkcje f_ρ oraz $v_{0\rho}$. Założono, że istnieją operatory graniczne $A, \mathcal{S}, \mathcal{R}$ spełniające założenia jak w poprzednio rozważanej inkluzji takie, że ciągi A_ρ, $\mathcal{S}_\rho$, $\mathcal{R}_\rho$ zbiegają do swoich granic "punktowo". Ponadto założono, ze f_ρ zbiega w $L^2(V^*)$ do f i $v_{0\rho}$ w V do v_0. Udowodniono, że ciąg rozwiązań u_ρ zbiega do właściwej granicy w $L^2(V)$ oraz $C(0,T;L^2(\Omega))$. Każdy czytelnik od razu zauważy brak analizy zmieniających się odwzorowań F, co jest istotne z punktu widzenia zastosowań tego typu inkluzji.
Ostatni podrozdział rozdziału drugiego to analiza hemivariacyjnych nierówności pierwszego rzędu z operatorami typu zależnego od historii argumentu. Rozważana jest nierówność postaci:

$$\begin{aligned}\langle u'(t) + A(t,u(t)) + (\mathcal{S}u)(t), v - u(t)\rangle + \varphi((\mathcal{R}_1 u)(t), Mv) - \varphi((\mathcal{R}_1 u)(t), Mu(t))\\ + J^0(t, Mu(t); M(v - u(t))) \geq \langle f(t), v - u(t)\rangle\end{aligned}$$

dla wszystkich $v \in K$ oraz prawie wszystkich $t \in (0,T)$ oraz $u(0) = v_0$. Założenia na A są podobne do poprzednich. Podobnie jest z założeniami na J i φ. Nowością jest operator typu operatora zależnego od historii argumentu oraz operator M generujący operator zwarty z $L^2(V)$ do $L^2(X)$ złożone z φ. Technika dowodu jest znowu podobna. Zamraża się argumenty operatorów $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}_1$ i doprowadza do zastosowania twierdzenia o punkcie stałym. Tym razem jednak kroki dowodowe są już bardziej zaawansowane i wymagały od autorki rozprawy pomysłowości.

Podsumowując rozdział drugi (najważniejszy w rozprawie) narzuca się następująca opinia: dlaczego autorka trzyma się jednej metody, która wymusza (moim zdaniem) bardzo silne założenia na nieliniowości występujące w rozważanych zagadnieniach. Jestem przekonany, że przy tak mocnych założeniach pracują też inne metody, które mogłyby pomóc w pozbyciu się niektórych warunków wzrostu.

Rozdział trzeci zawiera elementy modelowania zagadnień kontaktowych w mechanice ośrodka niesprężystego. Omówiono dokładnie warunki brzegowe na Γ_3 w postaci relacji wektor naprężenia a wektor przemieszczenia znane z literatury. Następnie autorka pisze, że w rozprawie zajmie się relacją wektor naprężenia a wektor prędkości przemieszczenia zastępując w porzedniej relacji u na u'. Szkoda, że nie pojawia się żaden komentarz wyjaśniający mechaniczny sens takich właśnie relacji.

Rozdział czwarty zawiera matematyczną analizę kilku zagadnień kontaktowych z mechaniki ośrodków niesprężystych. Cechą wspólną wszystkich tych zastosowań jest relacja konstytutywna postaci

$$\sigma = \sigma^{KV} + \sigma^{E} + \sigma^{NE}$$

(oznaczenia nie są z rozprawy) gdzie σ^{KV} jest częścią naprężenia zadaną relacją Kelvina-Voigta, σ^{E} jest sprężystą częścią relacji konstytutywnej (uogólnione prawo Hooke'a) oraz σ^{NE} jest typową częścią niesprężystą relacji konstytutywnej. Zaskakująca dla mnie jest kluczowa rola σ^{KV} w całej rozprawie tzn. operator zadający tą relację jest dominujący w rozprawie, a nie operator zadający relację sprężystą. Część σ^{NE} zmienia się w rozprawie. Pierwsze zagadnienia są związane z nieliniową relacją zadaną przez globalnie liszicowską nieliniowość natomiast ostatnie problemy zawierają liniową relację zadającą σ^{NE}. We wszystkich rozważanych zagadnieniach postępowanie autorki jest podobne tzn. sprowadza się cały problem do jednego z wcześniej zbadanych zagadnień abstrakcyjnych i stosuje gotowe narzędzie. Należy jednak podkreślić, że sprawdzenie wszystkich założeń potrzebnych do wykorzystania abstracyjnego problemu wymagało od autorki rozprawy wiele pracy i pomysłowości. Nie będę dokładnie analizował wszystkich rozważanych problemów gdyż wydłużyloby to znacznie moją i tak już obszerną recenzję. Chciałbym tylko podkreślić ponownie, że ze wzgędu na dosyć silne założenia stawiane nieliniowościom występującym w problemach abstrakcyjnych, założenia na nieliniowości w zagadnieniach kontaktowych mechaniki ośrodka niesprężystego są także bardzo silne (globalna lipszicowskość lub co najwyżej liniowe warunki wzrostu).

Cała rozprawa doktorska jest napisana na dobrym poziomie. Układ rozdziałów jest czytelny i użyte techniki dowodowe świadczą o dobrym opanowaniu warsztatu analitycznego i zrozumieniu wszystkich stosowanych narzędzi.

Podsumowując uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska

History-dependent nonlinear inclusions and variational-hemivariational inequalieties with applications to contact mechanics autorstwa pani magister *Justyny Ogorzały*

spełnia wszystkie ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim z matematyki i wnioskuję o dopuszczenie pani magister *Justyny Ogorzały* do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

prof. dr hab. Krzysztof Chełmiński