

## Nieliniowe inkluzje i nierówności wariacyjno-hemiwariacyjne z operatorami historii z zastosowaniami w mechanice kontaktowej

*Streszczenie rozprawy doktorskiej*

Teoria nierówności wariacyjnych została zapoczątkowana pracami Signoriniego [3], Fischery [2] oraz Tinga [4] i jest pomocnym narzędziem w badaniu nieliniowych zagadnień mechaniki i fizyki. Jednak ta teoria okazała się być niewystarczająca, ponieważ nie można było podać słabych sformułowań dla zjawisk fizycznych opisanych za pomocą praw, które zawierają niewypukłe i niegładkie funkcjonały energii. Ze względu na to P. D. Panagiotopoulos wprowadził pojęcie nierówności hemiwariacyjnej jako uogólnienie nierówności wariacyjnej. Podstawową ideą było zastosowanie uogólnionej subróżniczki, wprowadzonej przez Clarke'a w [1], dla klasy funkcji spełniających lokalny warunek Lipschitza. W celu zbadania niegładkich wariacyjnych zagadnień z ograniczeniami jednostronnymi, rozszerzono teorię nierówności hemiwariacyjnych na specjalną klasę nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnych, w których występują zarówno funkcjonały wypukłe jak i niewypukłe. W rozprawie badamy nieliniowe inkluzje z operatorami historii oraz nierówności wariacyjno-hemiwariacyjne z operatorami historii.

Rozprawa składa się z dwóch części. W pierwszej części badamy istnienie i jednoznaczność rozwiązania abstrakcyjnej ewolucyjnej inkluzji pierwszego rzędu z operatorami historii oraz dwóch abstrakcyjnych nierówności wariacyjno-hemiwariacyjnych z operatorami historii. Pierwsza z tych nierówności jest quasistatyczna a druga ewolucyjna pierwszego rzędu. Co więcej, przedstawimy abstrakcyjny wynik, który dotyczy ciągłej zależności rozwiązania ewolucyjnej inkluzji pierwszego rzędu z operatorami historii od zaburzenia odpowiednich operatorów i funkcji. W drugiej części rozprawy, zastosujemy uzyskane abstrakcyjne wyniki do analizy czterech zagadnień kontaktowych.

- Quasistatyczne zagadnienie kontaktowe z tarciem dla materiałów sprężysto-lepkoplastycznych. Zjawisko kontaktowe jest modelowane przez warunek z ograniczeniem jednostronnym, warunek normalnej tłumionej odpowiedzi z pamięcią podłoża, natomiast tarcie jest opisane przez uogólnione prawo Coulomba w postaci subróżniczki.
- Dynamiczne zagadnienie kontaktowe z tarciem dla ciała lepkosprężystego z długą pamięcią. Prawo kontaktu jest opisane przez warunek normalnej zgodności uwzględniający pamięć podłoża, zaś tarcie przez uogólniony warunek Coulomba.
- Dynamiczne zagadnienie kontaktowe z prawami kontaktu i tarcia modelowanymi przez potencjały wypukłe i niewypukłe.
- Dynamiczne zagadnienie kontaktowe z warunkiem normalnej zgodności uwzględniającym efekty sztywności i pamięci podłoża i warunkiem Coulomba.

Rozprawa rozszerza istniejące wyniki dotyczące zagadnień z operatorami historii oraz stanowi nowy wkład do matematycznej teorii mechaniki kontaktowej. Rozprawa zawiera nowe zagadnienia kontaktowe z operatorami historii. Ponadto, w modelach rozważamy różne warunki brzegowe i prawa tarcia,

które zawierają wypukłe i niewypukłe funkcjonały. Nowością w rozprawie jest także specjalna struktura inkluzji i nierówności, które stosujemy do analizy zagadnień kontaktowych. W pracy pokażemy, w jaki sposób rozważane zagadnienia kontaktowe prowadzą do nowego typu inkluzji i nierówności oraz jak zastosować uzyskane abstrakcyjne wyniki do analizy zagadnień kontaktowych.

## Literatura

- [1] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [2] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Accad. Naz. dei Lincei 7 (1964), 91–140.
- [3] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 2 (1933), 231–251.
- [4] T. W. Ting, *Elastic-plastic torsion problem III*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 34 (1969), 228–244.

# **History-Dependent Nonlinear Inclusions and Variational-Hemivariational Inequalities with Applications to Contact Mechanics**

*Abstract of PhD Thesis*

The theory of variational inequalities has its origin in the works of Signorini [3], Fichera [2] and Ting [4] and it is a useful tool in the study of nonlinear problems of physics and mechanics. However, this theory turned out to be insufficient because it was impossible to give variational formulations of mechanical problems with nonconvex and nonsmooth energy functionals. For this reason, in 1980s, P. D. Panagiotopoulos introduced a notion of hemivariational inequality as a generalization of variational inequalities. This notion is based on the generalized subdifferential, initiated by Clarke in [1] for a class of locally Lipschitz functions. In order to study of e.g. nonsmooth variational problems with constraints, the theory of hemivariational inequalities was extended to a special class of variational-hemivariational inequalities where both convex and nonconvex functions occur. In the thesis we study nonlinear inclusions with history-dependent operators and variational-hemivariational inequalities with history-dependent operators.

The thesis consists of two parts. In the first part, we investigate an existence and uniqueness of solution of abstract evolutionary inclusion of first order with history-dependent operators and two abstract variational-hemivariational inequalities with history-dependent operators, wherein one of these inequalities is quasistatic and the second one is evolutionary. Furthermore, we present an abstract result which states the continuous dependence of the solution of history-dependent evolutionary inclusion of first order with respect to the data. Whereas, in the second part of the thesis we present applications of the abstract results into the analysis of four contact problems. Namely, we study a quasistatic frictional contact problem in which the material behavior is modelled with an elastic-viscoplastic constitutive law. The contact is modelled with unilateral constraint, normal damped response and memory term. In this model, the friction is given by the generalized Coulomb law of dry friction which has a subdifferential form. Next, we consider a mathematical model which describes the frictional contact between a viscoelastic body and a foundation. In this case we assume that the process is dynamic and the behaviour of the material is expressed by a viscoelastic constitutive law with long memory. The contact is modelled by the condition with normal compliance and memory effect of the foundation. On the other hand, the friction is described by a general version of Coulomb's law of dry friction. Finally, we consider two dynamical contact problems in which the behaviour of the material is modelled by a viscoelastic constitutive law with long memory. In one of these models the contact condition and friction law are described by multivalued conditions which contain the convex and nonconvex potentials. In the second model the contact condition is modelled by normal compliance condition with the stiffness coefficient and the memory term. Moreover, the friction law is given by the Coulomb law of dry friction.

The thesis extends the existing results, which concern the problems with history-dependent



operators, and provides a new contribution to the mathematical theory of contact mechanics. The first trait of novelty of the thesis lies in the fact that it includes the new contact problems with the operators of history type. Moreover, our models take into account different boundary conditions and friction laws in which convex and nonconvex potentials occur. The second novelty in the thesis relates to the structure of the inclusion and the inequalities which are used in the analysis of contact problems. In the thesis we show how the considered contact models lead to new type of inclusions and variational-hemivariational inequalities. On the other hand, we show how obtained abstract results can be used to investigate the contact problems.

## Literatura

- [1] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [2] G. Fichera, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Mem. Accad. Naz. dei Lincei 7 (1964), 91–140.
- [3] A. Signorini, *Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 2 (1933), 231–251.
- [4] T. W. Ting, *Elastic-plastic torsion problem III*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 34 (1969), 228–244.