

Maciej Bendkowski

Zespół Katedr i Zakładów Informatyki Matematycznej,
Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jagielloński, ul. Łojasiewicza 6, 30–348 Kraków

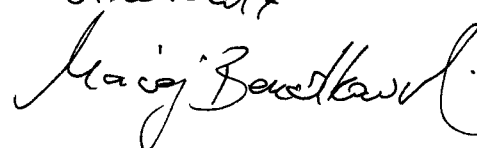
ILOŚCIOWE ASPEKTY ORAZ GENEROWANIE LOSOWYCH TERMÓW RACHUNKU
LAMBDA ORAZ TERMÓW RACHUNKU KOMBINATORÓW

W rozprawie prezentujemy ilościową analizę rachunku lambda w notacji de Bruijna jak i rachunku kombinatorów przy założeniu różnych baz kombinatorów pierwotnych. Dowodzimy, iż oba modele obliczeń wykazują tak zwaną własność ustalonego podtermu – dla dowolnego termu T , asymptotycznie prawie wszystkie termy zawierają T jako podterm. W konsekwencji, oba modele wykazują podobne własności ilościowe w kontekście normalizacji czy typowalności – dowodzimy iż asymptotycznie prawie żaden term jest silnie normalizowalny czy typowalny. Co więcej, asymptotycznie prawie żaden normalizowalny term jest jednocześnie silnie normalizowalny.

W kontekście rachunku lambda, badamy średnią wagę indeksu de Bruijna w ramach ogólnego modelu rozmiaru zaproponowanego przez Gittenbergera oraz Gołębiewskiego. Wykazujemy, iż wartość oczekiwana średniej wagi indeksu de Bruijna, wraz z rozmiarem termów dążącym do nieskończoności, dąży do stałej zależnej tylko od przyjętej definicji rozmiaru. Następnie, skupiamy się na tak zwanym naturalnym rozmiarze, w ramach którego podajemy kilka wyników ilościowych. Przykładowo, utożsamiamy ciąg zliczający odpowiadający tak zwanym termom neutralnym z ciągiem zliczającym odpowiadającym tak zwanym drzewom Motzkina, podając wzajemnie jednoznaczne bijekcje zachowujące rozmiar rozważanych struktur. Bazując na algorytmie generującym losowe drzewa Motzkina autorstwa Bachera, Bodiniego oraz Jacquot, otrzymujemy algorytm generujący jednostajnie losowe termy neutralne o danym na wejściu rozmiarze.

W kontekście rachunku kombinatorów, podajemy konstruktywną charakteryzację kombinatoryczną normalizowalnych SK -kombinatorów bazującą na hierarchii jednoznacznych gramatyk drzewowych. Stosujemy uzyskaną charakteryzację podając algorytmiczną technikę konstruowania zbiorów normalizowalnych kombinatorów o dodatniej asymptotycznej gęstości w zbiorze wszystkich kombinatorów. W konsekwencji, dowodzimy, iż asymptotyczna gęstość normalizowalnych kombinatorów nie może być mniejsza niż 34%. Omawiamy ograniczenia naszej metody oraz podajemy wyniki eksperymentów komputerowych sugerujących, iż asymptotyczna gęstość normalizowalnych kombinatorów wynosi w przybliżeniu 85%.

W końcu, omawiamy metody efektywnego generowania losowych termów lambda jak i kombinatorów, ze szczególnym uwzględnieniem termów domkniętych oraz typowalnych. Podajemy efektywne samplery Boltzmannowskie dla kilku klas interesujących termów, w szczególności termów o tak zwanej ograniczonej płytkości indeksów. Łącząc modele Boltzmannowskie oraz techniki programowania logicznego dostępne we współczesnych implementacjach języka Prolog, podajemy schemat generowania domkniętych oraz typowalnych termów lambda, omawiając przy tym przeszkody uniemożliwiające generowanie dużych domkniętych i jednocześnie typowalnych termów lambda.

09.05.2017


Maciej Bendkowski

Theoretical Computer Science Department,
Faculty of Mathematics and Computer Science,
Jagiellonian University, ul. Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków

QUANTITATIVE ASPECTS AND GENERATION OF RANDOM LAMBDA AND
COMBINATORY LOGIC TERMS

We present a quantitative analysis of λ -calculus in the de Bruijn notation and combinatory logic under various combinator bases. Both classes of computational models are shown to share the fixed subterm property – for an arbitrary fixed term T , asymptotically almost all terms contain T as a subterm. In consequence, both models exhibit similar quantitative properties with respect to normalisation and typeability. Specifically, asymptotically almost no term is either strongly normalising or typeable. Furthermore, asymptotically almost no normalising term is simultaneously strongly normalising.

In the context of λ -calculus, we investigate the average de Bruijn index weight within the general Gittenberger-Gołąbiewski size notion framework. We show that its mean value tends to a constant as the term size tends to infinity. Moreover, we focus on the so-called natural size notion for which we state several quantitative results. For instance, we identify the corresponding counting sequence of neutral λ -terms with Motzkin trees giving mutually inverse size-preserving translations. As a result, we obtain an exact-size sampler for the former based on the exact-size sampler for Motzkin trees of Bacher, Bodini and Jacquot.

Concerning combinator-specific results, we provide a complete syntactic characterisation of normalising SK -combinators by means of a constructive hierarchy of unambiguous regular tree grammars. As an application, we present an algorithmic technique of finding asymptotically significant fractions of normalising SK -combinators. Utilising our systematic approach, we show that the asymptotic density of normalising combinators cannot be less than 34%. We discuss the limits of our method and, based on super-computer experimental results, discuss the asymptotic density and average complexity of normalising combinators, arguing that the asymptotic density of normalising combinators is approximately equal to 85%.

Finally, we discuss the effective generation of random λ -terms and combinators, focusing on the set of closed and typeable λ -terms. We provide effective Boltzmann samplers for several classes of interesting λ -terms including the restricted class of so-called closed h -shallow λ -terms, i.e. closed λ -terms in which de Bruijn indices are bounded by h . Combining Boltzmann models and logic programming techniques available in modern Prolog systems, we give a sampling scheme for closed typeable λ -terms and discuss the intriguing challenges blocking effective sampling of large closed typeable λ -terms.

09.05.2012

