dr hab. Agnieszka Kałamajska, prof. UW
Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski
ul. Banacha 2, 02–097 Warszawa
adres e-mail: kalamajs@mimuw.edu.pl

Warszawa, 31 października, 2016

Recenzja
rozprawy doktorskiej pani mgr. Liliany Klimczak pt. "Nieliniowe zagadnienia brzegowe typu Neumanna z operatorami typu p-Laplacea"

Recenzowana rozprawa doktorska, napisana pod kierunkiem pana dr. hab. Leszka Gasińskiego, dotyczy twierdzeń o istnieniu rozwiązań dla zagadnień quasiliniowych typu eliptycznego, określonych na przestrzeniach typu Sobolewa, z zerowym warunkiem brzegowym typu Neumana. Zaprezentowane wyniki dotyczą istnienia nietrywialnych rozwiązań dla rozważanego zagadnienia, oraz ich regularności, przy możliwie ogólnych warunkach definiujących równanie.

Rozprawa liczy 75 stron tekstu, napisanego drobnym drukiem i składa się merytorycznie z czterech rozdziałów, oraz z "Zakończenia" i bibliografii. Część wyników rozprawy została już opublikowana w postaci trzech arytkułów o numeracji podanej zgodnie z bibliografią:

[24] L. Gasinski, L. Klimczak, N. S. Papageorgiou, Nonlinear noncoercive Neumann problems, Comm. Pure and Appl. Anal., 15 (2016), s. 1107–1123.
[38] L. Klimczak, Two constant sign solutions for a nonhomogeneous Neumann boundary value problem, Ann. Univ. Paedagog. Crac. Stud. Math., 14 (2015), s. 47–62.
[39] L. Klimczak, Existence and multiplicity of solutions for a nonhomogeneous Neumann boundary problem, Opuscula Math., 35 (2015), s. 889–905.

Rozprawa zawiera także nowe wyniki, jeszcze nie opublikowane.

Rozdział wstępny to opis treści rozprawy. Jest on ciekawy i rzeczowy.

Rozdział drugi zawiera pojęcia wstępne z zakresu analizy funkcjonalnej, potrzebne do zrozumienia dalszej części rozprawy. Są tam między innymi zamieszczone informacje o przestrzeniach typu Sobolewa, funkcjonałach monotonicznych, warunkach typu zwartościowego funkcjonałów, wprowadzenie do stosowanych potem metod topologicznych (jak między innymi metody bezpośrednie rachunku wariacyjnego, twierdzenia minimaksowe, elementy teorii Morsa), oraz wykorzystane później narzędzia z teorii równań cząstkowych (odpowiednia wersja zasady maksimum i twierdzenie o regularności rozwiązań). Tu mam drobną uwagę krytyczną dotyczącą rozdziału 2.2.3. W definicji k-tej grupy krytycznej występują k-te homologie singularne, które nie zostały w rozprawie wprowadzone. Czytelnik spotkał się we "Wprowadzeniu" ze znacznie prostszymi pojęciami, natomiast w przypadku tych konkretnych musi sięgnąć do podanych źródeł bibliograficznych.

Kolejny rozdział, Rozdział 3, zawiera sformułowanie problemu. Są tu podane między innymi zestawy założeń dotyczące rozważanego operatora. Założenia ilustrowane są przykładami, zawierającymi precyzyjne obliczenia. Tu może chętniej zobaczyłabym zamiast rachunków poglądowe odnośniki do literatury, gdzie spotykamy się w sposób uzasadniony modelami fizyki, lub ekonomii, z takiego typu funkcjonałami. W rozdziale 3 zamieszczony jest także szereg rezultatów pomocniczych. Chyba najbardziej zaawansowane od strony technicznej jest Stwierdzenie 2.2.3 o istnieniu rozwiązania, w pewnej klasie zagadnień, które równocześnie minimalizuje stowarzyszony z zagadnieniem funkcjonał wariacyjny.

Najtrudniejszy i zarazem najważniejszy jest Rozdział 4, który zawiera główne wyniki rozprawy. Rozdział ten jest podzielony na cztery podrozdziały, gdzie kolejno dowodzone jest istnienie wielu rozwązań z jednostronnie ograniczonym warunkiem wzrostu, jednostronnie ograniczoną funkcją pierwotną, dla funkcji $(p-1)$- podliniowych oraz $(p-1)$-nadliniowych w nieskończoności. Bardzo ciekawe jest twierdzenie o istnieniu rozwiązań stałego znaku (Twierdzenie 4.1) zamieszczone w podrozdziale 4.1.1. Najpierw modyfikuje się funkcjonał do prostszego, następnie stosując metody bezpośrednie rachunku wariacyjnego pokazuje się że ten zmodyfikowany funkcjonał osiąga minimum. Poprzez dobranie odpowiedniej funkcji próbnej pokazuje się, że to minimum jest stałego znaku i odpowiednio ograniczone, że minimalizuje ono również wyjściowy funkcjonał, oraz że jest ono nietrywialne i odpowiednio regularne. Z kolei w dowodzie Twierdzenia 4.2, o istnieniu rozwiązań ekstremalych korzysta się z lematu Kuratowskiego-Zorna.
Wyniki podrozdziału 4.1.1 opierają się, lecz i rozszerzają wyniki pracy [38], wyniki podrozdziału 4.1.2 zostały opublikowane w pracy [38], natomiast wyniki pozostałych podrozdziałów opierają się na pracy [24].

Dowody są technicznie bogate, wymagają dużej sprawności analitycznej, oraz opanowania metod topologii algebraicznej, szczególnie tych wykorzystujących k-te grupy krytyczne. Mówiąc w bardzo dużej ogólności, dowody polegają najpierw na pokazaniu, że zestawy założeń określajçe operator pozwalają zastosować metody topologiczne wprowadzone w poprzednim rozdziale. Stosuje się następnie metody topologii algebraicznej aby stwierdzić, że pewne k-te grupy krytyczne funkcjonału są nietrywialne. Funkcjonał ma zatem nietrywialne punkty krytyczne.

Ważna jest także znajomość twierdzeń o regularności dla tego typu zagadnień, oraz nowoczesnych zasad maksimum. Jest to także zakres solidnej matematyki. Dobre opanowanie go, w połączeniu z metodami topologicznymi, robi bardzo dobre wrażenie.

Ciekawy jest dodatek "Zakończenie", który nie tylko podsumowuje wyniki rozprawy, lecz także odnosi się do możliwych kierunków jej kontynuacji.

Na bibliografię składa się 59 pozycji, z czego 11 pozycji bibliograficznych to utwory powstałe przy udziale promotora pracy, pana dr. hab Leszka Gasińskiego oraz jego współpracownika, Nikolasa S. Papageorgiou, znanego greckiego matematyka.

Uzupełnienia, oraz motywacje do podjęcia tematyki rozprawy, opierają się głównie na wcześniejszych pracach promotora oraz Nikolasa S. Papageorgiou.

Znalazłam drobne literówki które nie wpłynęły na merytoryczny efekt pracy, na przykład w równaniu (1.2) prawa strona powinna być pomnożona przez λ_1- najlepszą stałą w nierówności Poincer'ego.

Uważam że rozprawa jest ciekawa, wartościowa, trudna oraz wymagała dużej wiedzy. Z drobnych uwag krytycznych, prace [38] i [38] mogły być opublikowane w czasopismach wyższych rangą, prawdopodobnie po lepszym ich zredagowaniu.

Konkluzja.
Biorąc pod uwagę dokonane osiągnięcie, z pełnym przekonaniem stwierdzam, że przedstawiona rozprawa doktorska pani mgr. Lilianny Klimczak spełnia wszystkie zwyczajowe i ustawowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie jej do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Z wyrazami szacunku,

A. Kałamajska

Agnieszka Kałamajska