AUTOREFERAT

1. Imię i Nazwisko

Maciej Piotr DENKOWSKI

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- magister matematyki,
  dyplom z wyróżnieniem uzyskany na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w roku 2002;
- doktor nauk matematycznych,
  dyplom podwójny Uniwersytetu Jagiellońskiego i Uniwersytetu Bordeaux 1 (w systemie *co-tutelle*) uzyskany na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego w roku 2006,

  promotorzy:
  prof. dr hab. Piotr Tworzewski (UJ),
  prof. Alain Yger (Bordeaux 1);

  tytuł rozprawy:
  Effective methods and estimations in the theory of c-holomorphic functions.

3. Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

- *2006-2008:* asystent w Katedrze Geometrii Analitycznej i Algebraicznej w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego;
- *2008-obecnie:* adiunkt w w Katedrze Geometrii Analitycznej i Algebraicznej (od 2015 w Katedrze Geometrii Analitycznej) w Instytucie Matematyki na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. 2016 r. poz. 882 ze zm. w Dz. U. z 2016 r. poz. 1311.):

4.1. **Tytuł osiągnięcia naukowego.**

Geometryczne aspekty teorii osobliwości i zastosowania zbieżności Kuratowskiego

4.2. **Prace stanowiące osiągnięcie naukowe.**

[A1] Maciej P. Denkowski, Rafał Pierzchała, *On the Kuratowski convergence of analytic sets*, Ann. Polon. Math. 93 no. 2 (2008), pp. 101-112;
[A2] Zofia Denkowska, Maciej P. Denkowski, *The Kuratowski convergence and connected components*, J. Math. Anal. Appl. (2012) 387 no. 1, pp. 48-65;
[A3] Maciej P. Denkowski, *On the points realizing the distance to a definable set*, J. Math. Anal. Appl. 378 no. 2 (2011), pp. 592-602;
[A4] Lev Birbrair, Maciej P. Denkowski, *Medial axis and singularities*, J. Geom. Anal. (2017) DOI 10.1007/s12220-017-9763-x (open access: Springerlink.com; papierowa wersja ukaże się w vol. 27 no. 2), 43 strony;
[A5] Maciej P. Denkowski, Jean-Jacques Loeb, *On open analytic and subanalytic mappings*; Complex Var. Elliptic Equ. vol. 62 no.1 (2017), 27-46;
[A6] Maciej P. Denkowski, *Multiplicity and the pull-back problem*, Manuscripta Math. vol. 149 (2016), 83-91.

4.3. **Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.**

4.3.1. *Ogólny zarys prezentowanych wyników.*

Teoria osobliwości bada obiekty, których struktura lokalna doznaje załamania, czy to w wyniku nagłej utraty jakiejś cechy, własności ogólnej (np. osobliwości zbioru analitycznego to punkty, w których zbiór ten traci strukturę różniczkową), czy też w efekcie jakiegoś procesu deformacyjnego (np. drobne zaburzenie w sparametryzowanej rodzinie funkcji gładkich może prowadzić do dużej zmiany jakościowej, chociażby jeśli chodzi o ich punkty krytyczne). Jej początki sięgają czasów Newtona, który w tym zakresie badał głównie zagadnienia zaliczane dziś do geometrii algebraicznej. Jednakże swój największy i najbardziej spektakularny rozwój teoria osobliwości przeżywa dopiero od około sześćdziesięciu-siedemdziesięciu lat wraz z nowymi kierunkami wytyczonymi jej przez takich matematyków jak Hassler Whitney, René Thom, Włodzimierz Arnold, czy Stanisław Łojasiewicz. Jej znaczenie w analizie, geometrii różniczkowej, czy układach dynamicznych i od niedawna w teorii optymalizacji jest nie do przecenienia.

Naturalną koleją rzeczy, tak pojemna teoria rozwija się w kilku kierunkach wymuszających nierzadko skrajnie odmienne podejście i metody badawcze nawet w przypadku zagadnień mających wspólne źródło. I tak, inaczej wyglądają badania zaliczane do teorii osobliwości w geometrii algebraicznej, gdzie króluje algebra, inaczej w szeroko rozumianej analizie, gdzie stosuje się metody typowo różniczkowe. Wciąż raczej do rzadkości należą metody czysto geometryczno-topologiczne, i to nawet na gruncie teorii struktur o-minimalnych. Metody te są jednak bardziej naturalne niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka i nierzadko dają całkiem mocne wyniki. Ich niewątpliwą zaletą jest przejrzystość.

Wybrane przez mnie prace [A1]–[A6] dotyczą zagadnień należących do geometrii analitycznej tak rzeczywistej (a więc ściślej: teorii zbiorów subanalitycznych i struktur o-minimalnych; przymiotnik „analityczna" w odniesieniu do tej geometrii jest pewnym nadużyciem, usankcjonowanym jednakże przez tradycję), jak i zespolonej. Tak jak teoria osobliwości jest bardzo rozległa, tak i prezentowane przez mnie prace odzwierciedlają dość szeroki zakres moich zainteresowań, od geometrii analitycznej zespolonej ([A1], [A6]), poprzez metryczną teorię osobliwości mającą zastosowania w robotyce i teorii rozpoznawania obrazu ([A3], [A4]), po geometrię rzeczywistą: zbiory subanalityczne i struktury o-minimalne ([A2], [A5]). Ich wspólnym mianownikiem jest otrzymywanie wyników dotyczących własności topologicznych, analitycznych, czy metrycznych osobliwości metodami typowo geometrycznymi, opartymi w dużej mierze na zastosowaniu zbieżności Kuratowskiego zbiorów domkniętych.

To ostatnie pojęcie, tak często wykorzystywane w teorii optymalnego sterowania ([1]), nie było dotąd zanadto popularne w teorii osobliwości. W geometrii analitycznej zespolonej znane jest głównie klasyczne twierdzenie Bishopa podające warunki wystarczające na analityczność granicy zbieżnego w sensie Kuratowskiego ciągu zbiorów analitycznych, czy jego odpowiednik w geometrii algebraicznej uzyskany przez Tworzewskiego i Winiarskiego [30]. Zbieżność ta pojawia się u Stolzenberga [27] i leży również u podwalin tzw. zbieżności prądowej zbiorów analitycznych, tożsamej ze zbieżnością wprowadzoną przez Piotra Tworzewskiego w [32], na co rzadko zwraca się uwagę (zob. [24]; dopiero od niedawna zyskała na popularności za sprawą problemów aproksymacji algebraicznej w ujęciu Bilskiego [3]). W przypadku rzeczywistym zbieżność Kuratowskiego, w wersji ograniczonej do dobrze znanej zbieżności w sensie metryki Hausdorffa, po raz pierwszy bodajże pojawiła się u Bröckera [6] w latach osiemdziesiątych, niedawno zaś została wprowadzona do teorii struktur o-minimalnych za sprawą Liona i Speisseggera [18], dalej rozwijana przez Pawłuckiego i jego uczniów [10]. Warto nadmienić, że zbieżność Kuratowskiego jest wygodnym językiem formułowania pojęcia półciągłości dla multifunkcji, co tłumaczy jej popularność chociażby w optymalizacji (prace Bolte'a, Daniilidisa i in. z pogranicza teorii optymalnego sterowania i struktur o-minimalnych).

Zanim przejdę do szczegółowego omówienia zawartości poszczególnych artykułów w części 4.3.1, przedstawię krótkie ich streszczenie.

Praca [A1] zalicza się w gruncie rzeczy do zespolonej geometrii analitycznej chociaż bazuje częściowo na wynikach z teorii struktur o-minimalnych. Jej motywacją było poszukiwanie nowych kryteriów algebraiczności globalnych zbiorów analitycznych w $\mathbb{C}^n$, co udało się uzyskać właśnie przy użyciu zbieżności Kuratowskiego oraz poprzez wprowadzenie nowego pojęcia stopnia

[1]W latach '70 ubiegłego wieku Ennio De Giorgi wprowadził tzw. Γ-zbieżność funkcjonałów, która jest równoważna zbieżności Kuratowskiego ich nadwykresów. Pojęcie to znalazło szerokie zastosowania w rachunku wariacyjnym i sterowaniu optymalnym, np. do badania wrażliwości (*sensitivity*) rozwiązań optymalnych.

zbioru Nasha i stopnia zbioru analitycznego. Drugim, ubocznym, lecz znaczącym wynikiem tej pracy zainspirowanym przez wspomniane wyżej twierdzenie Tworzewskiego-Winiarskiego jest odpowiednik twierdzenia Chevalley'a-Remmerta o rzucie w przypadku zespolonych zbiorów Nasha.

Praca [A2] poświęcona jest w całości badaniu zbieżności Kuratowskiego na gruncie teorii struktur o-minimalnych na ciele liczb rzeczywistych, a konkretnie ciągłości i półciągłości w sensie tej zbieżności sparametryzowanych definiowalnie rodzin zbiorów definiowalnych i domkniętych ze szczególnym naciskiem na zachowanie graniczne poszczególnych składowych spójnych. Obok podstawowych wyników dotyczących definiowalności granic, generycznej ciągłości (co uzupełnia wspomniane wyżej wyniki Bröckera), czy wreszcie „dobrej" zbieżności składowych spójnych (kontrola ich liczby w granicy), przedstawiamy też wynik dotyczący aproksymacji zbiorów definiowalnych za pomocą zbiorów semi-algebraicznych.

Artykuł [A3] dotyczy tzw. szkieletu czy kośćca (*medial axis*) danego podzbioru otwartego $\mathbb{R}^n$ — obiektu znanego od sześćdziesięciu lat, a przeżywającego obecnie drugą młodość wraz ze wzrostem jego znaczenia jako centralnego pojęcia w teorii rozpoznawania obrazów. W pracy [A3] badam strukturę szkieletu w przypadku zbiorów subanalitycznych i definiowalnych rodzin zbiorów definiowalnych w strukturach o-minimalnych na $\mathbb{R}$. W szczególności interesujące są związki szkieletu z osobliwościami wyjściowego zbioru, tudzież pewne jego własności graniczne wyrażone za pomocą zbieżności Kuratowskiego.

Naturalną kontynuacją pracy [A3] i niedawnych rezultatów Birbraira i Siersmy [4] jest duży artykuł [A4], w którym szczegółowo zajmujemy się badaniem sposobu w jaki szkielet „wyjada" osobliwości danego zbioru i podajemy warunki na to, aby tak było (naturalnie najmocniejsze wyniki uzyskane są na płaszczyźnie) oraz wyliczamy stożek styczny w tym przypadku (znów przy użyciu zbieżności Kuratowskiego).

Praca [A5] ponownie znajduje swoje główne źródło w geometrii zespolonej, a dokładniej nawet w klasycznej analizie zespolonej, choć jest poniekąd powiązana z pewnymi problemami dotyczącymi deformacji kośćca przy przechodzeniu do granicy Kuratowskiego. Punktem wyjścia są warunki konieczne i wystarczające dla otwartości odwzorowania analitycznego oraz zbadanie otwartości odwzorowań analitycznych właściwych. W przypadku zespolonym klasyczne twierdzenia w tym zakresie znane są od ponad pół wieku, przypadek rzeczywisty jednak znalazł się w kręgu zainteresowań matematyków raczej niedawno wraz z pracami Rongi i Gamboy [15] oraz Hirscha [16] dla odwzorowań wielomianowych i analitycznych rzeczywistych, z dodatkową motywacją w postaci kontrprzykładu Pinczuka [22] dla rzeczywistej hipotezy jakobianowej Kellera jako jedynego znanego dotąd przykładu odwzorowania wielomianowego otwartego i nie właściwego płaszczyzny. W pracy [A5] otrzymaliśmy warunki konieczne i wystarczające dla otwartości odwzorowań subanalitycznych lub definiowalnych i klasy $\mathscr{C}^1$. Jedną z głównych technik jest charakteryzacja otwartości odwzorowania za pomocą zbieżności Kuratowskiego poziomic, co pozwala stosować wyniki z artykułu [A2].

Zacząłem od geometrii zespolonej i na niej kończę pracą [A6], w której stosując teorię przecięć izolowanych niewłaściwych Achillesa-Tworzewskiego-Winiarskiego [1] uogólniam wzór Spodziei [26] pozwalający liczyć krotność rzutowania właściwego na zbiorze analitycznym i stosuję go do przeprowadzenia prostego dowodu twierdzenia uzyskanego niedawno przez Petera Ebenfelta i Lindę Rothschild [14], a dotyczącego zachowania w obrazie gładkości kiełka analitycznego poprzez kiełek analitycznego odwzorowania skończonego w $\mathbb{C}^n$.

Szczegółowe omówienie prezentowanych prac.

4.3.2. [A1] *O zbieżności Kuratowskiego zbiorów analitycznych.*

Zbieżność zbiorów domkniętych (zwana też zbieżnością lokalnie jednostajną) wprowadzona została na początku XXw. przez francuskiego matematyka Paula Painlevégo, lecz to Kazimierz Kuratowski usystematyzował to pojęcie w swojej dwutomowej *Topologie* z połowy XXw. i to z jego nazwiskiem najczęściej się je dziś łączy, choć wkład w rozwój teorii miało wielu matematyków (Zoretti, Vietoris, Zarankiewicz, czy bardziej współcześnie Frolík).

Jest to bardzo naturalne uogólnienie na zbiory domknięte pojęcia zbieżności zwartych, niepustych zbiorów w metryce Hausdorffa, górujące nad tym ostatnim prostotą użycia i szerokim polem zastosowań. Zbieżność Kuratowskiego leży u podstaw tak istotnego w teorii sterowania optymalnego narzędzia jak Γ-zbieżność De Giorgiego, pozwala też zdefiniować w rozsądny sposób półciągłości górną i dolną multifunkcyj domkniętych. Jest to również naturalna zbieżność w geometrii analitycznej (zob. [29]): w przypadku zespolonym pojawia się w twierdzeniu Bishopa (podającym warunek wystarczający dla analityczności granicy), czy też w ważnym dla omawianej pracy wniosku z niego — zbieżny w sensie Kuratowskiego ciąg algebraicznych zbiorów zespolonych stałego wymiaru o wspólnie ograniczonych stopniach rzutowych ma granicę algebraiczną (twierdzenie Tworzewskiego–Winiarskiego [30]). Po uwzględnieniu zaś krotności (wg idei P. Tworzewskiego z [32]) zbiorów analitycznych, zbieżność ta pokrywa się ze zbieżnością w sensie prądów (Sł. Rams [24], A. Yger). O dziwo, w przypadku rzeczywistym (tj. w geometrii subanalitycznej, strukturach o-minimalnych, czy nawet w geometrii semi-algebraicznej) jest jak dotąd bardzo niewiele wyników dotyczących zbieżności Kuratowskiego (Bröcker [6], Lion–Speissegger [18], Kocel-Cynk–Pawłucki–Valette [10]).

W zbiorze $\mathcal{F}_X$ podzbiorów domkniętych danej przestrzeni metrycznej X lokalnie zwartej z II aksjomatem przeliczalnosci można wprowadzić topologię za pomocą bazy złożonej ze zbiorów

$$\mathcal{U}(K,S) = \{F \in \mathcal{F}_X \mid F \cap K = \varnothing, F \cap U \neq \varnothing, \text{gdy } U \in S\},$$

gdzie $K \subset X$ jest zbiorem zwartym, a S skończoną rodziną podzbiorów otwartych. Otrzymana topologia jest metryzowalna i zwarta a zbieżność w niej nazywamy *zbieżnością Kuratowskiego* i zapisujemy $F_\nu \xrightarrow{K} F$ w $\mathcal{F}_X$.

W praktyce zbieżność F_ν do F w $\mathcal{F}_X$ jest równoważna temu, że każdy punkt $x \in F$ jest granicą ciągu punktów $x_\nu \in F_\nu$ oraz dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset X \setminus F$ mamy $F_\nu \cap K = \varnothing$ dla prawie wszystkich indeksów ν.

Pierwszy z powyższych dwu warunków oznacza, że $F \subset \liminf F_\nu$, gdzie ostatni zbiór składa się z granic ciągów zbieżnych (x_ν) wybieranych ze zbiorów F_ν tzn. $x_\nu \in F_\nu$, i zwie się *granicą dolną Kuratowskiego* ciągu (F_ν). Drugi warunek z kolei oznacza, że $\limsup F_\nu \subset F$, gdzie pierwszy ze zbiorów to granice podciągów zbieżnych (x_{ν_k}) wybieranych ze zbiorów F_ν, czyli $x_{\nu_k} \in F_{\nu_k}$, i nazywa się go *granicą górną Kuratowskiego* ciągu (F_ν).

W przypadku, który nas interesuje, a więc gdy ograniczymy się do *zespolonych podzbiorów analitycznych* otwartego zbioru $X \subset \mathbb{C}^n$ ([2]), granica zbieżnego ciągu takich zbiorów nie jest na ogół analityczna (por. [A1] Remark 1.1). Warunek dostateczny na to, aby jednak tak było podaje wspomniane wyżej twierdzenie Bishopa (zob. [A1] Theorem 3.2): jeżeli zbiegamy ciągiem zbiorów analitycznych stałego wymiaru k o wspólnie ograniczonych $2k$-wymiarowych miarach Hausdorffa, to granica jest albo zbiorem pustym, albo zbiorem analitycznym stałego wymiaru k. Odpowiednik algebraiczny tego twierdzenia pochodzi od Tworzewskiego i Winiarskiego ([30], zob. [A1] Theorem 3.1): granica zbieżnego ciągu algebraicznych podzbiorów $\mathbb{C}^n$ stałego wymiaru k i o wspólnie ograniczonych stopniach rzutowych jest bądź pusta, bądź takimż zbiorem algebraicznym.

Te wyniki zainspirowały nas do dwóch rzeczy: znalezienia odpowiednika wspomnianych twierdzeń dla ciągu zbiorów Nasha oraz do poszukania „zbieżnościowego” czy też „aproksymacyjnego” kryterium algebraiczności globalnego zbioru analitycznego. Ten ostatni problem nasuwa się w naturalny sposób w związku ze stosowanymi technikami dowodowymi.

Zamiast przypominać klasyczną definicję zbiorów Nasha, wykorzystamy tu ich charakteryzację podaną przez Tworzewskiego [31] w przypadku zespolonym. Otóż nierozkładalny analityczny podzbiór N zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jest *zbiorem Nasha*, gdy istnieje taki nierozkładalny zbiór algebraiczny $V \subset \mathbb{C}^n$, że N jest składową nierozkładalną zbioru $V \cap \Omega$. Taki nadzbiór V jest wyznaczony jednoznacznie na mocy zasady identyczności dla zbiorów.

[2]Przypomnijmy, że poprzez *analityczny* rozumiemy taki podzbiór domknięty w X, który lokalnie opisany jest skończonym układem równań analitycznych (w danym wypadku holomorficznych).

Pierwszym krokiem w celu uzyskania odpowiednika twierdzenia Tworzewskiego-Winiarskiego dla zbiorów Nasha było zdefiniowanie *stopnia* takiego zbioru, będącego odpowiednikiem stopnia rzutowego zbioru algebraicznego. W przypadku zbioru nierozkładalnego N naturalnym jest przyjąć

$$\deg(N;\Omega) := \deg V,$$

gdzie V jest tym jedynym nadzbiorem algebraicznym dla N, a $\deg V$ jego stopniem rzutowym. Dla zbioru rozkładalnego rozumiemy stopień jako sumę stopni składowych, dopuszczając przy tym ∞ (co jest równoważne temu, że rozważany zbiór ma nieskończenie wiele składowych nierozkładalnych). Dodatkowo przyjmujemy, że $\deg(\varnothing,\Omega) = 0$.

Przypomnijmy, że dla zbioru algebraicznego $V \subset \mathbb{C}^n$ stałego wymiaru k istnieje otwarty i gęsty (w sensie wprowadzonej wyżej topologii) pozdbiór U_V ogółu wszystkich $(n-k)$-wymiarowych podprzestrzeni afinicznych $G'_{n-k}(\mathbb{C}^n)$ przestrzeni $\mathbb{C}^n$ o tej własności, że stopień rzutowy $\deg V$ jest równy $\#(L \cap V)$ dla dowolnej podprzestrzeni afinicznej $L \in U_V$.

Ta obserwacja pozwala wprowadzić dodatkową definicję *globalnego stopnia* (w odróżnieniu od stopnia lokalnego, czyli liczby Lelonga w danym punkcie) dla dowolnego zbioru analitycznego $A \subset \Omega$. Mianowicie, jeśli A ma stały wymiar k, przyjmujemy

$$\mathrm{dg}(A;\Omega) := \sup\{\#(L \cap A) \mid L \in G'_{n-k}(\mathbb{C}^n)\colon \dim(L \cap A) = 0\} \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\},$$

pamiętając, że już $(n-k)$-ty grassmannian $G_{n-k}(\mathbb{C}^n)$ zawiera podzbiór otwarty i gęsty podprzestrzeni tnących A w sposób dyskretny (w istocie jest to spełnione dla podprzestrzeni branych z dopełnienia pewnego zbioru miary zero w $G_{n-k}(\mathbb{C}^n)$ jak pokazujemy w [A1] Theorem 2.5). Oczywiście, gdy A jest rozkładalny, to rozważamy sumy mnogościowe składowych nierozkładalnych tego samego wymiaru, dla nich wyliczamy stopień globalny i sumujemy otrzymany ciąg liczb, aby otrzymać $\mathrm{dg}(A;\Omega)$ w tym przypadku.

Dla zbioru algebraicznego $V \subset \mathbb{C}^n$ mamy

$$\deg V = \deg(V;\mathbb{C}^n) = \mathrm{dg}(V;\mathbb{C}^n).$$

Co więcej, dzięki kryterium algebraiczności Grumana i wspomnianemu wynikowi [A1] Theorem 2.5 pozwalającemu nam je stosować, otrzymujemy natychmiastowo równoważność:

$$\text{zbiór analityczny } A \subset \mathbb{C}^n \text{ jest algebraiczny } \Leftrightarrow\ \mathrm{dg}(A;\mathbb{C}^n) < +\infty.$$

Dla zbioru Nasha $N \subset \Omega$ mamy $\mathrm{dg}(N;\Omega) \leqslant \deg(N;\Omega)$ i nierówność może być ostra nawet dla zbioru nierozkładalnego (por. [A1] Remark 2.8).

Pierwszym uzyskanym przez nas twierdzeniem jest

Twierdzenie 1 ([A1] Theorem 3.4)**.** *Niech A będzie dowolnym podzbiorem zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Jeżeli istnieje ciąg zbiorów Nasha $N_\nu \subset \Omega$ zbieżny w sensie Kuratowskiego do $A \cap \Omega$ i $\deg(N_\nu;\Omega) \leqslant d$ dla wszystkich ν, to $A \cap \Omega$ jest zbiorem Nasha.*
Ponadto, gdy spełniony jest dodatkowo jeden z dwu warunków:

• *$\Omega = \mathbb{C}^n$;*
lub
• *A jest analityczny i $A \cap \Omega \neq \varnothing$,*
to A jest algebraiczny.

Powyższe twierdzenie ma natychmiastowy i bardzo ważny wniosek będący odpowiednikiem twierdzenia Chevalley'a-Remmerta o rzucie (jednego z kluczowych rezultatów geometrii algebraicznej) dla zbiorów Nasha:

Wniosek 2 ([A1] Corollary 3.5)**.** *Jeśli $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jest otwarty a N jest podzbiorem Nasha zbioru $\Omega \times \mathbb{C}^m$ mającym tylko skończenie wiele składowych nierozkładalnych, to domknięcie w Ω rzutu $\pi(N)$, dla rzutowania naturalnego $\pi\colon \Omega \times \mathbb{C}^m \to \Omega$, jest Nasha w Ω.*

Założenie skończoności liczby składowych jest istotne jak łatwo się przekonać na przykładzie zbioru $N = \{(1/\nu, \nu) \mid \nu = 1, 2, \dots\}$.

Również stopień globalny zbioru analitycznego pozwala wprowadzić pewne zbieżnościowe kryterium algebraiczności:

Twierdzenie 3 ([A1] Theorem 3.7)**.** *Niech $A \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem analitycznym stałego wymiaru k. Załóżmy, że dla danego wstępującego ciągu zbiorów otwartych $U_1 \subset U_2 \subset \dots$ sumujących się do $\mathbb{C}^n = \bigcup_{i=1}^{+\infty} U_i$ mamy ciągi $(A_{ij})_j$ analitycznych podzbiorów $A_{ij} \subset U_i$ $(i = 1, 2, \dots)$ stałych wymiarów k i czyniących zadość następującym dwóm warunkom:*
• *$A_{ij} \xrightarrow{K} A \cap U_i$ $(j \to +\infty)$, $i = 1, 2, \dots$;*
• *$\mathrm{dg}(A_{ij}; U_i) \leqslant d$, $i, j = 1, 2, \dots$.*
Wówczas A jest zbiorem algebraicznym.

Istotnym dopełnieniem tego twierdzenia jest przykład [A1] Example 4.4 w produkcie koła jednostkowego $\mathbb{D}$ i $\mathbb{C}$ ciągu zbiorów Nasha $N_\nu \subset \mathbb{D} \times \mathbb{C}$ o wspólnie ograniczonych stopniach globalnych $\mathrm{dg}(N_\nu; \mathbb{D} \times \mathbb{C})$, ale zbieżnego do śladu wykresu $y = e^x$, a więc zbioru nie algebraicznego w $\mathbb{C}^2$, na $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Oznacza to, że twierdzenie 1 nie zachodzi dla stopnia globalnego.

4.3.3. [A2] *Zbieżność Kuratowskiego a składowe spójne.*

Ten artykuł poświęcony jest badaniu zachowania składowych spójnych definiowalnej rodziny zbiorów definiowalnych, gdzie definiowalaność rozumiana jest w danej strukturze o-minimalnej na ciele liczb rzeczywistych. Może przypomnijmy, co to dokładnie jest struktura o-minimalna.

Definicja 4. *Strukturą* na ciele $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nazywamy rodzinę $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $\mathcal{S}_n$ oznacza rodzinę podzbiorów $\mathbb{R}^n$, przy czym spełnione są następujące warunki:

(1) $\mathcal{S}_n$ zawiera wszystkie podzbiory algebraiczne $\mathbb{R}^n$;
(2) $\mathcal{S}_n$ jest algebrą Boole'a tzn. rodziną zamkniętą na skończone sumy i przecięcia oraz branie dopełnienia.
(3) Jeśli $A \in \mathcal{S}_m$, $B \in \mathcal{S}_n$, to $A \times B \in \mathcal{S}_{m+n}$;

(4) Jeśli $\pi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest rzutowaniem naturalnym i $A \in \mathcal{S}_{n+1}$, to $\pi(A) \in \mathcal{S}_n$.

Zbiory z $\mathcal{S}_n$ zwiemy *definiowalnymi* podzbiorami $\mathbb{R}^n$.
Struktura $\mathcal{S}$ jest *o-minimalna*, gdy dodatkowo spełniony jest warunek

(5) $\mathcal{S}_1$ składa się dokładnie ze skończonych sum punktów i przedziałów dowolnego typu.

W naturalny sposób definiujemy funkcje definiowalne:

Definicja 5. Dla danej struktury $\mathcal{S}$ nazywamy *definiowalną* (w $\mathcal{S}$) funkcję $f\colon A \to \mathbb{R}^n$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^m$, o wykresie należącym do $\mathcal{S}_{m+n}$.

Każda struktura o-minimalna jest rozszerzeniem klasy zbiorów semi-algebraicznych. Podkreślmy w tym miejscu, że zbiory subanalityczne ([3]) z kolei nie tworzą struktury o-minimalnej (z powodu problemów z warunkiem (4)), chyba że ograniczymy się do tzw. zbiorów *globalnie subanalitycznych* tj. takich, które pozostają subanalityczne w $\mathbb{R}^n$ po przekształceniu ich poprzez homeomorfizm semi-algebraiczny $x \mapsto x/(1 + ||x||)$ (chodzi o kontrolę tego, co się dzieje z danym zbiorem w nieskończoności). Wymusza to adaptowanie niektórych dowodów do sytuacji subanalitycznej. Zaznaczmy w tym miejscu, że pierwszym survey'em przedstawiającym historię rozwoju geometrii subanalitycznej (od eliminacji kwantyfikatorów Tarskiego w geometrii semi-algebraicznej, poprzez teorię zbiorów semi-analitycznych wprowadzonych przez Łojasiewicza i rozwinięcie jej w teorię zbiorów subanalitycznych przy współudziale Hardta, Gabriełowa i Hironaki) i powolne jej oddawanie pola znacznie młodszym strukturom o-minimalnym wprowadzonym przez van den Driesa, oraz podkreślającym różnice pomiędzy teoriami, jest nasz artykuł [C3]. Istota struktur o-minimalnych, podobnie jak i geometrii subanalitycznej, zasadza się na tym, że topologia zbiorów rozważanej klasy jest „ujarzmiona" (wg słów Grothendiecka).

Pytanie o ciągłość przekrojów zbioru subanalitycznego pochodzi jeszcze od Łojasiewicza i właściwie aż dotąd pozostawało na obrzeżach geometrii subanalitycznej, czy później o-minimalnej (por. [11], [12] – te dwie prace są odpowiedzią na pytanie Łojasiewicza, [6], [C1], [18], [10]).

Jak wspomnieliśmy już w części 4.3.2, zbieżność Kuratowskiego jest naturalną zbieżnością zbiorów domkniętych, uogólniającą zbieżność w sensie metryki Hausdorffa zbiorów zwartych i niepustych (dla zbiorów zwartych jest tożsama z tą ostatnią). Sytuacja, jaką badamy w pracy [A2], jest ogólniejsza niż ta z [A1]. Rozważamy mianowicie dla niepustego zbioru $E \subset \mathbb{R}^k_t \times \mathbb{R}^m_x$ i rzutowania $\pi_k(t,x) = t$, przy oznaczeniu $F := \pi_k(E)$, przekrój w $t \in F$

$$E_t := \{x \in \mathbb{R}^m \mid (t,x) \in E\}.$$

[3] Przypomijmy czym są zbiory subanalityczne. Otóż dany podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$, czy ogólniej podzbiór rozmaitości analitycznej M, jest *semi-analityczny*, gdy w otoczeniu dowolnego punktu przestrzeni opisany jest skończonym układem równań i nierówności analitycznych. Podzbiór $E \subset M$ jest *subanalityczny*, gdy w otoczeniu dowolnego punktu M jest rzutem pewnego zbioru semi-analitycznego względnie zwartego $A \subset M \times N$, gdzie N jest pewną rozmaitością analityczną. Semi- lub subanalityczność funkcji rozumiemy jako semi- lub subanalityczność jej wykresu, żądając na ogół przy tym subanalityczności jej dziedziny.

Dla uproszczenia będziemy badać sytuację w punkcie $t_0 = 0 \in F$. Zbiór E określa net (ciąg uogólniony) $\{E_t\}$ przekrojów $E_t \subset \mathbb{R}^m$.

Definicja 6. Piszemy

(1) $x \in \limsup E_t$, gdy dla dowolnych: $U \subset \mathbb{R}^m$ otoczenia x, $V \subset \mathbb{R}^k$ otoczenia 0, istnieje taki $t \in V \setminus \{0\}$, że $E_t \cap U \neq \varnothing$.
(2) $x \in \liminf E_t$, gdy dla dowolnego otoczenia $U \ni x$ istnieje takie otoczenie $V \ni 0$, że $E_t \cap U \neq \varnothing$, gdy $t \in V \cap F \setminus \{0\}$.

Oczywiście $\liminf E_t \subset \limsup E_t$, zaczem E_t *zbiega do* E_0 w sensie Kuratowskiego dokładnie wtedy, gdy

$$\limsup E_t \subset E_0 \subset \liminf E_t,$$

co zapisujemy jak uprzednio $E_t \xrightarrow{K} E_0$.

Gdy E jest domknięty, to $\lim E_t = E_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E_0 \subset \liminf E_t$ (zob. [C1] (2.1)). Warto jednak zauważyć, że w kategorii zbiorów definiowalnych lub subanalitycznych częściej naturalniejszą jest zbieżność w sensie granicy górnej Kuratowskiego.

Mówiąc o rodzinie definiowalnej $\{E_t\}_{t\in F}$ mamy na myśli, że zbiór $E = \bigcup_{t\in F}\{t\}\times E_t$ jest definiowalny. Inaczej rzecz ujmując, mamy wówczas do czynienia z multifunkcją definiowalną $E\colon F \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. Z opisu w definicji wynika natychmiast definiowalność obu granic, górnej i dolnej, w przypadku rodziny definiowalnej ([A2] Theorem 2.5).

Składowe spójne odgrywają bardzo ważną rolę w geometrii rzeczywistej, chociażby z racji tego, że do pewnego stopnia zastępują w niej znane z geometrii analitycznej zespolonej pojęcie składowych nierozkładalnych. Dużą bowiem trudnością geometrii rzeczywistej jest brak sztywnej regularności, która cechuje geometrię zespoloną ([4]). Ważnym faktem jest tu twierdzenie gwarantujące, że składowe spójne należą do tej samej kategorii, co dany zbiór (definiowalny, semi-analityczny — to słynne twierdzenie Łojasiewicza, czy wreszcie subanalityczny). Liczba składowych (a więc zerowa liczba Bettiego b_0) również należy do ważnych obiektów charakteryzujących zbiór (pierwsze wyniki z geometrii analitycznej dotyczące b_0 pochodzą od Whitney'a, rozwijane później przez Thoma, Milnora, czy Warrena). Stąd nasze szczególne zainteresowanie właśnie zachowaniem liczby składowych przy zbieżności w sensie Kuratowskiego. Praca [A2] jest również w w części rozwinięciem pewnych semi-algebraicznych wyników Bröckera z [6] (ciągłość przekrojów prawie wszędzie — w sensie definiowalnym, półciągłość wymiaru. . .).

[4] W przypadku zespolonym osobliwości zbioru analitycznego znów tworzą zbiór analityczny, domknięcie zaś składowej spójnej części regularnej zbioru analitycznego jest ponownie zbiorem analitycznym — obie te własności nie mają miejsca w przypadku rzeczywistym, o czym łatwo się przekonać na przykładzie parasola Whitney'a $x^2 = y^2z$. Z kolei nierozkładalność zespolonego zbioru analitycznego jest równoważna spójności jego części regularnej, co znowuż nie jest prawdą dla zbiorów rzeczywistych, jak moża zobaczyć, rozważając zwykłą hiperbolę.

Większość naszych wyników definiowalnych ma przełożenie na zbiory subanalityczne, ewentualnie przy dodatkowym założeniu względnej zwartości w kierunku rzutowania (wg nazewnictwa Łojasiewicza).

Wykorzystując lemat 2.10 z [A2] o definowalności funkcji wymiaru $\delta(t, z) = \dim_x E_t$, udowadniamy następujące twierdzenie o ciągłości prawie wszędzie (w sensie definiowalnym) przekrojów (istotną rolę w dowodzie odgrywa praca [C1]):

Twierdzenie 7 ([A2] Theorem 2.11). *Zbiory*

$$Ls(E) := \{t_0 \in F \colon E_{t_0} = \limsup_{t \to t_0} E_t\},$$
$$Li(E) := \{t_0 \in F \colon E_{t_0} = \liminf_{t \to t_0} E_t\}$$

są definiowalne, a więc również ich przecięcie

$$L(E) := \{t_0 \in F \colon E_{t_0} = \lim_{t \to t_0} E_t\}.$$

Ponadto, $L(E) = Li(E)$*, a gdy dodatkowo* $\dim F > 0$*, to* $\dim F \setminus L(E) < \dim F$ *oraz* $\dim F \setminus Ls(E) < \dim F$.

W dalszej części zajmujemy się już *stricte* składowymi spójnymi przekrojów zbioru definiowalnego i domkniętego E (lub subanalitycznego i ograniczonego w kierunku x). Jeśli oznaczymy $cc(E_t)$ rodzinę składowych spójnych przekroju E_t, to wiadomo, że $\#cc(E_t) \leqslant N$ dla wszystkich $t \in F$ i pewnego $N \in \mathbb{N}$ ([5]). Zakładamy ponadto, że

$$E_0 = \lim E_t.$$

Podstawowe dwa pytania są następujące:

Problem. *Czy w rozważanej sytuacji zachodzą podane niżej warunki?*

(1) $\#cc(E_0) \leqslant \#cc(E_t)$ *dla* $t \in F$ *w otoczeniu zera;*
(2) *Dla dowolnej składowej* $S \in cc(E_0)$ *istnieje otoczenie zera w* F*, w którym dla każdego* t *dobierzemy rodzinę* $\{S_1^t, \dots, S_{r_t}^t\} \subset cc(E_t)$*, dla której* $S = \lim \bigcup_j S_j^t$.

Szereg przykładów w pracy [A2] ilustruje trudności, jakich należy się spodziewać, jak również pokazuje, dlaczego założenie definiowalności jest potrzebne (w (2) chodzi o jednoczesną kontrolę nad wszystkimi składowymi).

Ważnym wynikiem pośrednim, potrzebnym do dowodów, ale mającym też znaczenie ogólne, jest następujące twierdzenie

Twierdzenie 8 ([A2] Theorem 3.1). *Jeśli* $E \subset \mathbb{R}_t^k \times \mathbb{R}_x^n$ *jest definiowalny lub subanalityczny* x*-względnie zwarty, to funkcja*

$$\nu \colon \mathbb{R}^k \ni t \mapsto \#cc(E_t) \in \mathbb{Z}_+$$

jest definiowalna lub, odpowiednio, subanalityczna.

W przypadku rodziny jednoparametrycznej otrzymujemy

---

[5] W przypadku subanalitycznym wynik ten pochodzi od Gabriełowa.

Twierdzenie 9 ([A2] Theorem 3.7). *Jeśli $E \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ jest zwartym definiowalnym/subanalitycznym zbiorem i $E_0 = \lim E_t$ (gdy $t \to 0$ lub tylko $t \to 0^+$), to $\#cc(E_t) \geqslant \#cc(E_0)$ dla dostatecznie małych t. Ponadto każda składowa $S \in cc(E_0)$ jest granicą sumy pewnych składowych przekrojów E_t: istnieje definiowalny zbiór $E^S \subset E$, dla którego przy dowolnym $t \in F$ z otoczenia zera, $\varnothing \neq cc(E^S_t) \subset cc(E_t)$ i $E^S_t \to S$.*

Warto zaznaczyć, że nie można zastąpić tu granicy granicą górną, jak pokazuje przykład 2.14 z [A2].

Założenie definiowalności można jednak obejść, jeżeli założymy, że $\#cc(E_0) < +\infty$ (co jest konieczne w świetle przykładu 3.8 z [A2]). Tym samym okazuje się (podobnie jak to miało miejsce z oryginalnym pytaniem Łojasiewicza o ciągłość przekrojów), że pożądana własność jest, przy pewnych założeniach, własnością czysto topologiczną.

Twierdzenie 10 ([A2] Theorem 3.9). *Jeśli $E \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ jest zwarty i $E_0 = \lim E_t$ oraz $\#cc(E_0) < +\infty$, to*

(1) *$\#cc(E_t) \geqslant \#cc(E_0)$ dla $t \in F$ w otoczeniu zera;*
(2) *Dla każdej składowej $S \in cc(E_0)$ istnieje zwarty zbiór $E^S \subset E$, dla którego $\varnothing \neq cc(E^S_t) \subset cc(E_t)$, gdy $t \in F$ leży w otoczeniu zera, oraz $S = \lim E^S_t$. Ponadto, jeśli E jest definiowalny lub subanalityczny, to również i zbiór E^S oraz zachodzi nierówność $\dim E^S > \dim S$.*

Kolejny ważny wynik dotyczy półciągłości wymiaru (por. [6] Corollary 2.8).

Twierdzenie 11 ([A2] Theorem 3.13). *Jeśli $E \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ jest definiowalny (odpowiednio: subanalityczny) i zwarty oraz $E_0 = \lim E_t$, to $\dim E_t \geqslant \dim E_0$ dla wszystkich $t \in F = \pi_k(E)$ dostatecznie bliskich zeru.*

Przykład 3.14 z [A2] pokazuje, że nie można zastąpić w powyższym twierdzeniu granicy granicą górną, ani też nie można liczyć na twierdzenie odwrotne.

W dalszej części pracy stosujemy otrzymany wynik do aproksymacji semialgebraicznej zbiorów subanalitycznych w duchu prac Bilskiego z geometrii zespolonej, wraz z jednoczesną aproksymacją składowych spójnych składowymi. Mianowicie otrzymujemy stosując rozkłady komórkowe wraz z twierdzeniem aproksymacyjnym Weierstrassa oraz twierdzenie 10 następujący wynik:

Twierdzenie 12 ([A2] Theorem 4.1). *Jeśli $E \subset \mathbb{R}^m$ jest zwartym zbiorem subanalitycznym, to istnieje ciąg $\{A_\nu\}$ zbiorów semi-algebraicznych spełniający warunki*

(1) *$E = \lim A_\nu$;*
(2) *Dla każdego $a \in E$ i jego otoczenia U, dla dostatecznie dużych ν, $\dim U \cap E = \dim U \cap A_\nu$.*

Ponadto dla dowolnego ciągu zbiorów semi-algebraicznych $\{A_\nu\}$ czyniącego zadość powyższym warunkom mamy własność następującą: dla każdej składowej $S \in cc(E)$ istnieje ciąg $\{S_\nu\}$, w którym każdy zbiór S_ν jest sumą pewnych składowych zbioru A_ν i warunki (1) oraz (2) są spełnione dla S wraz z ciągiem $\{S_\nu\}$.

Założenie zwartości jest potrzebne właśnie do drugiej części twierdzenia (por. przykład z [A2] Remark 4.2). Stosując twierdzenie o rektylinearyzacji Hironaki wraz z obserwacją Pawłuckiego i Pleśniaka [21] Corollary 6.2 (por. [A2] Theorem 4.6), można uzyskać odpowiednik tylko pierwszej części twierdzenia, czyli lokalną aproksymację semi-algebraiczną ([A2] Theorem 4.7).

Ostatni, piąty rozdział pracy [A2] poświęcony jest ciągom zbiorów domkniętych oraz ogólnym własnościom topologicznym zbieżności Kuratowskiego i był zainspirowany pytaniem zadanym przez J.-Ph. Rolina z Dijon dotyczącego jednostajnego ograniczenia liczby składowych spójnych przy przejściu granicznym. W szczególności otrzymujemy uzupełnienie twierdzenia Zorettiego dla continuuów z początku XXw. (punkt (2) poniżej, przykład 5.2 z [A2] pokazuje istotność założenia zwartości):

Twierdzenie 13 ([A2] Poposition 5.1)**.** *Jeśli $E \subset \mathbb{R}^k_t \times \mathbb{R}^n_x$ jest zbiorem domkniętym i takim, że przekroje E_t są spójne dla wszystkich $t \in F \setminus \{0\}$, to*

(1) *gdy $n = 1$ i $E_0 = \liminf E_t$, to E_0 jest spójny;*
(2) *gdy $E_0 = \lim E_t$ i E_0 jest zwarty, to E_0 jest spójny.*

Twierdzenia wypowiadamy w przestrzeni euklidesowej, niemniej jednak, zgodnie z uwagą 5.3 z pracy, wszystkie pozostają prawdziwe w dowolnej lokalnie zwartej przestrzeni metrycznej z II aksjomatem przeliczalności. Odpowiedzią na pytanie Rolina jest poniższy wynik.

Twierdzenie 14 ([A2] Proposition 5.5)**.** *Jeśli $F_\nu \xrightarrow{K} F$ z jednostajnym ograniczeniem $\#cc(F_\nu) \leqslant N$, a F jest zwarty, to $\#cc(F) \leqslant N$.*

Jednakże za główny wynik rozdziału 5 należy uznać następujące nietrywialne twierdzenie:

Twierdzenie 15. *Załóżmy, że $F = \lim F_\nu$, gdzie F_ν są zbiorami spójnymi i przyjmijmy, że F nie jest spójny. Wtedy rodzina $cc(F)$ nie zawiera zbioru zwartego.*

4.3.4. [A3] *O punktach realizujących odległość od zbioru definiowalnego.*

Punktem wyjścia pracy [A3] jest następujący, klasyczny, lemat udowodniony przez Nasha w jego słynnej pracy [20]:

Lemat 16 ([20])**.** *Niech M będzie podrozmaitością analityczną w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Istnieje wówczas otoczenie $U \subset \Omega$ zbioru M czyniące zadość warunkom:*

(i) *dla dowolnego $x \in U$ istnieje dokładnie jeden punkt $m = m(x) \in M$ realizujący odległość euklidesową: $\operatorname{dist}(x, M) = ||x - m(x)||$;*
(ii) *funkcja $m\colon U \ni x \mapsto m(x) \in M$ jest analityczna.*

Związać z nim można dwa naturalne pytania.

Problem.

(1) *Czy podobny wynik zachodzi, gdy M ma osobliwości?*

(2) *Jaka jest struktura zbioru „wyjątkowego" punktów niejednoznaczności realizacji odległości?*

Pierwsze pytanie prowadzi nas w naturalny sposób na grunt geometrii subanalitycznej, względnie struktur o-minimalnych. Drugie pytanie natomiast okazuje się być ściśle związane z dynamicznie rozwijającą się w ostatnich latach teorią rozpoznawania obrazów, w której centralnym pojęciem jest właśnie ów zbiór „wyjątkowy", zwany w tym wypadku szkieletem i wprowadzony już w latach '60 XXw. przez Bluma [5]. Jak dotąd nikt właściwie nie zwrócił dostatecznej uwagi na związek tego zbioru z teorią osobliwości. Większość badań prowadzona była przy założeniu gładkości zbioru M (co najmniej klasy $\mathscr{C}^2$.). Naturalną kontynuacją pracy [A3] mającą na celu zbadanie w jaki sposób szkielet jest w stanie „wychwycić" osobliwości zbioru jest praca [A4].

Wyróżnimy kilka typów punktów regularnych dla zbioru $M \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathrm{Reg}_k M := \{x \in M \mid M \text{ jest podrozmaitością klasy } \mathscr{C}^k \text{ w otoczeniu } x\},$$

dla $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$, gdzie $\mathscr{C}^\omega$ oznacza analityczność (w tym przypadku piszemy $\mathrm{Reg} M := \mathrm{Reg}_\omega M$ oraz $\mathrm{Sng} M := M \setminus \mathrm{Reg} M$ dla osobliwości.)

Dużą rolę w dowodach odgrywa ważne i z eleganckim dowodem geometryczno-analitycznym twierdzenie Poly'ego i Raby'ego:

Twierdzenie 17 ([23])**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie domknięty i niepusty i połóżmy $\delta(x) := \mathrm{dist}(x, M)^2$. Wtedy dla $k \geqslant 2$ lub $k \in \{\omega, \infty\}$,*

$$\mathrm{Reg}_k M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \delta \textit{ jest klasy } \mathscr{C}^k \textit{ w otoczeniu } x\} \cap M.$$

Ogólnym odpowiednikiem lematu Nasha jest podane poniżej twierdzenie z parametrem dla zbioru definiowalnego w ustalonej strukturze o-minimalnej. Przyjmujemy dla $M \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$ jak poprzednio oznaczenie M_t na przekrój w t tj. $M_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in M\}$. Niech $\pi_k(t, x) = t$.

Zakładamy, że $M \subset \mathbb{R}^k_t \times \mathbb{R}^n_x$ jest niepusty, o lokalnie domkniętych przekrojach po t i kładziemy $N := \pi_k(M)$.

Twierdzenie 18 ([A3] Theorem 2.1)**.** *Załóżmy, że M jest definiowalny. Wówczas istnieje definiowalny zbiór $W \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ o otwartych przekrojach po t i taki, że $M_t \subset W_t$ jest domknięty w W_t oraz $m(t, x) \neq \varnothing$ dla $x \in W_t$, gdzie*

$$m(t, x) := \{y \in M_t \colon ||x - y|| = \mathrm{dist}(x, M_t)\}, \quad (t, x) \in W.$$

Ponadto,

(1) *multifunkcja $m(t, x)$ jest definiowalna* ([6])*;*
(2) *istnieje definiowalny zbiór $E \subset W$ o nigdziegęstych przekrojach i taki, że na W*

$$\# m(t, x) = 1 \iff x \in W_t \setminus E_t;$$

w szczególności $m \colon W \setminus E \to \mathbb{R}^n$ jest definiowalna;

[6] Tzn. jej wykres $\{(t, x, y) \in W \times M \mid y \in m(t, x)\}$ jest definiowalny.

(3) *dla liczby całkowitej $p \geqslant 2$ istnieje zbiór definiowalny $F^p \subset W$ zawierający E i taki, że każdy zbiór F^p_t jest domknięty i nigdziegęsty; ponadto, $M_t \setminus F^p_t = \mathrm{Reg}_p M_t$ oraz*

$$m(t,\cdot) \text{ is } \mathscr{C}^{p-1} \text{ w otoczeniu } x \in W_t \setminus \overline{E_t} \Leftrightarrow \ x \notin F^p_t.$$

Przy ustalonym parametrze t mamy tu do czynienia z multifunkcją punktów najbliższych $x \mapsto m(t,x)$ do zbioru M_t. Przekrój E_t zbioru E jest zbiorem niejednoznaczności (niejednolistności) tej multifunkcji — wspomnianym wyżej zbiorem „wyjątkowym", czy też szkieletem, kośccem wg definicji 21. Punkt (3) poszerza ten zbiór do zbioru „wyjadającego" osobliwości klasy $\mathscr{C}^p$ zbioru M_t a wyznaczonego przez gładkość klasy $\mathscr{C}^{p-1}$ funkcji $m(t,\cdot)$ (jednolistnej w zbiorze otwartym będącym dopełnieniem $\overline{E_t}$). Co ciekawe, wszystko zależy tu w definiowalny sposób od wielowymiarowego parametru t.

Ta dobra zależność od parametru jest tym istotniejszą własnością, że przestaje być prawdziwa, gdy spróbujemy przenieść to twierdzenie na przypadek subanalityczny. Winę za ten stan rzeczy w dużej mierze ponosi fakt, że funkcja $(t,z) \mapsto d(x,M_t)$ nie jest na ogół bez dodatkowych założeń subanalityczna, gdy M jest subanalityczny (choć sama odległość $z \mapsto d(z,M)$, jak wiadomo, subanalityczna jest, gdy $z \in \mathbb{R}^n$; to jedna z najdonośniejszych obserwacyj w geometrii subanalitycznej). Łatwo zobaczyć to na przykładzie, który zaczerpniemy z survey'u [C3] (jest to modyfikacja przykładu z [A3] Remark 3.3). Niech

$$M = \{(x,1/x) \mid x > 0\} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{(1/n,-n)\} \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}.$$

Jest to zbiór subanalityczny, lecz $E = \bigcup\{(1/n,0)\}$ już nie.

Mimo wszystko subanalityczny analogon twierdzenia zachodzi, gdy pozbędziemy się parametrów.

Twierdzenie 19 ([A3] Theorem 3.2)**.** *Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ będzie niepustym, lokalnie domkniętym podzbiorem subanalitycznym. Istnieje wówczas subanalityczne otoczenie $W \supset M$, w którym M jest domknięty i ponadto*

(1) *multifunkcja $m(x) := \{y \in M\colon ||x-y|| = \mathrm{dist}(x,M)\} \neq \varnothing$, gdzie $x \in W$, jest subanalityczna;*
(2) *zbiór $E = \{x \in W\colon \#m(x) > 1\}$ jest subanalityczny i nigdziegęsty (w szczególności $m\colon W \setminus E \to \mathbb{R}^n$ jest funkcją globalnie subanalityczną);*
(3) *istnieje nigdziegęsty, subanalityczny zbiór $F \subset W$ domknięty w W i taki, że $E \subset F$, $F \cap M = \mathrm{Sng}M$ oraz $x \in W \setminus \overline{E}$ jest punktem analityczności funkcji m wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in W \setminus F$.*

Jak widać w punkcie (3) otrzymujemy analityczność funkcji m, co jest konsekwencją znanego lematu Tamma z [28] (którego geometryczny dowód bez odwoływania się do desyngularyzacji Hironaki podał Kurdyka w latach '80 XXw.). Należy podkreślić, że dowód powyższego twierdzenia nie polega na prostym przycinaniu M za pomocą wstępującego ciągu kostek i stosowaniu poprzedniego twierdzenia do zbiorów globalnie subanalitycznych $M_\nu = M \cap [-\nu,\nu]^n \subset \mathbb{R}^n$. Po prostu na ogół nie ma równości $E = \bigcup E_\nu$, gdzie E_ν

jest zbiorem wyjątkowym otrzymanym dla M_ν. Istotnie, jeśli M jest sumą półokręgów $\{x^2+(y-\nu)^2-(3/4)^2, y\leqslant\nu\}$, to $(0,\nu)\in E_\nu\setminus E_{\nu+1}$ i w szczególności $(0,\nu)\notin E$.

W drugiej części pracy badam własności multifunkcji $m(x)$ w przypadku zbioru subanalitycznego $M\subset\mathbb{R}^n$ (przy czym twierdzenia zachodzą bez zmian w dowodach również w strukturach o-minimalnych). Jest to multifunkcja półciągła z góry, tj. $\limsup_{x\to x_0} m(x)\subset m(x_0)$ w sensie granicy górnej Kuratowskiego, ale już na ogół nie ciągła (por. [A3] przykład 4.5), ani nie typu Lipschitza wg nazewnictwa Aubina (por. przykład 4.7 z [A3]). Jednakże multifunkcja ta ma jedną istotną własność, którą można interpretować jako *sui generis* geometryczny odpowiednik twierdzenia o rzędzie.

Dla ustalonego punktu $x_0\in E$ rozważmy wymiar analityczny ([7]) $k(x_0):=\dim m(x_0)$ oraz zbiór tych punktów $x\in E$, w których wymiar zbioru punktów najbliższych $m(x)$ jest równy $k(x_0)$, czyli zbiór subanalityczny:

$$E(x_0):=\{x\in E\mid \dim m(x)=\dim m(x_0)\}.$$

Otrzymane wyniki wypowiemy zbiorczo:

Twierdzenie 20 ([A3] Theorem 4.10, Theorem 4.13, Example 4.15)**.** *W rozważanej sytuacji*

(1) *Jeśli* $k(x_0)=n-1$ *(co jest maksymalnym możliwym wymiarem), to* $\dim E(x_0)=0$*, tzn.* $E(x_0)$ *jest izolowany;*
(2) *Ogólnie* $k(x_0)+\dim E(x_0)\leqslant n-1$ *i nierówność może być ostra już dla* $k(x_0)=1$*,* $n=3$*.*

Warto nadmienić, że kilka lat po publikacji dowiedziałem się z książki Cannarsy i Sinestrari [7], że punkt (1) powyższego twierdzenia był znany z pracy Albano i Cannarsy [2] w nieco innej formie w przypadku dowolnego zbioru M i wymiaru rozumianego jako wymiar Hausdorffa (co pokrywa się z wymiarem analitycznym w przypadku zbioru subanalitycznego). Punkt (2) natomiast, udowodniony metodami ściśle wykorzystującymi topologię ujarzmioną, czeka dotąd na uogólnienie.

4.3.5. [A4] *Szkielet a osobliwości.*

Praca [A4] jest naturalną kontynuacją artykułu [A3], mającą swoje źródło w punkcie (3) Twierdzenia 18.

Zaznaczmy raz jeszcze wyraźnie, że badania, na gruncie teorii osobliwości, zbioru zwanego szkieletem tj. *medial axis* czy jego wariantów, jak to zbioru centralnego danego obszaru, czy zbiorów konfliktowych, są umotywowane zastosowaniami w teorii rozpoznawania obrazów (gdzie szkielet jest podstawowym pojęciem) i robotyce. Pomimo istnienia całkiem pokaźnej literatury tematu, pozostawały dotąd i pozostają w tym zakresie duże obszary niezbadane. I to

[7]Zob. np. [A5] Definition 3.3; chodzi o wymiar największej w sensie inkluzji podrozmaitości analitycznej zawartej w danym zbiorze; w przypadku definiowalnym zastępujemy to przez wymiar ustalonej klasy $\mathscr{C}^p$, przy czym wynik nie zależy od p, (również w przypadku subanalitycznym, na mocy lematu Tamma).

pomimo faktu, że zbiory te stanowią przedmiot badań wielu wybitnych matematyków (zob. np. [33]) poczynając od lat ‘60 XXw. i artykułu Bluma [5]. W szczególności dotychczasowe wyniki albo zakładały jakiś mocny rodzaj gładkości (por. [8]), lub były natury aż nadto ogólnej. Nasze podejście mieści się niejako w połowie drogi, zbiory definiowalne bowiem (lub subanalityczne) pozostając bardzo szeroką klasą, wykluczają zachowania „patologiczne”.

Opracowanie [A4] podzielić można na trzy części i jest zdecydowanie zbyt obszerne (43 strony), aby omówić je tutaj w szczegółach. Dlatego ograniczymy się do przedstawienia najważniejszych wyników poszczególnych części.

Pierwsza z nich obejmuje ogólne wyniki dotyczące szkieletu i ma na celu m.in uporządkowanie (chciałoby się dodać „nareszcie” — w obliczu niewiarygodnego wręcz bałaganu panującego w literaturze w tym zakresie) pojęć z nim związanych. Podstawowe definicje są dwie, z czego najważniejsza jest następująca.

Definicja 21. Dla zbioru domkniętego $\varnothing \neq X \subset \mathbb{R}^n$ rozważamy *multifunkcję punktów najbliższych* $m\colon \mathbb{R}^n \ni x \mapsto m(x) = \{y \in X \mid ||y - x|| = d(x, X)\}$, gdzie $d(x, X)$ jest odległością euklidesową, i jej zbiór punktów niejednolistności

$$M_X := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \#m(x) > 1\} \subset \mathbb{R}^n \setminus X$$

nazywamy *medial axis* czyli *szkieletem* lub inaczej *kośćcem.*

Z drugiej strony mamy zbiór C_X środków kul maksymalnych (w sensie porządku danego inkluzją) zawartych w zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus X$. Zależność pomiędzy tymi zbiorami jest następująca:

$$M_X \subset C_X \subset \overline{M_X}$$

(domknięcie szkieletu znane jest pod nazwą *cut locus*). Choć jest to fakt wyraźnie funkcjonujący jako folklor, nie mogąc znaleźć jego dowodu w literaturze, zawarliśmy go w pracy ([A4] Theorem 2.25). Jest to zresztą jeden z wielu przykładów własności, które będąc intuicyjnie oczywistymi, wymagają wcale nieelementarnego rozumowania.

Podobnie, umieszczamy pełny i elementarny dowód charakteryzacji M_X jako zbioru punktów nieróżniczkowalności kwadratu funkcji odległości ([A4] Theorem 2.23). O fakcie tym wspomina (bez dowodu, odwołując się do fundamentalnej pracy Clarke’a [9]) Y. Yomdin w swoim artykule [33], ważnej pracy, lecz zawierającej kluczowy błąd (jak to wynika z przykładu zawartego w [4], por. [P6]), przez co woleliśmy sprawdzić dokładnie omawiane twierdzenie.

W pierwszej części zamieściliśmy również kilka własności multifunkcji m, np. pewne nierówności typu Łojasiewicza ([A4] Proposition 2.16, por. [P7]).

Druga część pracy poświęcona jest problemowi scharakteryzowania sytuacji, w której M_X dochodzi do zbioru X, tzn. opisowi punktów przecięcia $\overline{M_X} \cap X$. Wiadomo, że jest to podzbiór dopełnienia $\mathrm{Sng}_2 X$ punktów $\mathscr{C}^2$ gładkich zbioru X, a to na podstawie dawnego wyniku Nasha (Lemat 16) uwspółcześnionego w pracy [A3]. Jak pokazują przykłady, w które obfituje [A4], najciekawsze zjawiska mają miejsce w punktach $\mathscr{C}^1$-gładkich zbioru X, oznaczanych jak pamiętamy $\mathrm{Reg}_1 X$. W celu zbadania które z nich są wychwytywane przez domknięcie kośćca, wprowadziliśmy pojęcie *nadkwadratowości* i opisali je w [A4] Proposition 3.13 poprzez odpowiednio rozumiane pojęcie *rzędu znikania* funkcji, wzorowane na podobnym pojęciu wprowadzonym przeze mnie dla funkcyj c-holomorficznych w [B1] (por. [C1]). Możemy to mianowicie streścić następująco: kiełek funkcji definiowalnej, niestałej i ciągłej $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ jest nadkwadratowy wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{ord}_0 f \in (0, 2)$, gdzie

$$\mathrm{ord}_0 f = \sup\{\eta > 0 \mid |f(x)| \leqslant \mathrm{const.}||x||^\eta, ||x|| \ll 1\}.$$

Oprócz problemu osiągania osobliwości, z punktu widzenia metrycznego interesowało nas wyznaczenie stożka stycznego Peany

$$C_a(M_X) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists M_X \ni x_\nu \to a, \exists t_\nu > 0\colon t_\nu(x_\nu - a) \to v\}$$

w punkcie $a \in \overline{M_X} \cap X$. W pełni udało się rozwiązać przypadek płaszczyzny w twierdzeniach 3.19, 3.21, 3.24 oraz 3.27 w [A4], które — pomijając szczegóły — zbiorczo można wypowiedzieć następująco:

Twierdzenie 22 ([A4] 3.19, 3.21, 3.24, 3.27)**.** *Niech $X \subset \mathbb{R}^2$ będzie krzywą definiowalną, $0 \in X$. Wówczas*

(1) $0 \in \overline{M_X}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy albo* $0 \in \mathrm{Sng}_1 X$ *i kiełek w zerze* $X\setminus\{0\}$ *ma przynajmniej dwie składowe spójne, lub* $0 \in \mathrm{Reg}_1 X \cap \mathrm{Sng}_2 X$ *i* X *jest w zerze wykresem funkcji nadkwadratowej.*

(2) *Jeżeli* $0 \in \overline{M_X}$*, to stożek styczny* $C_0(M_X)$ *składa się z półprostych dwusiecznych kątów utworzonych z półprostych składających się na stożek styczny* $C_0(X)$ *dobieranych parami wg gałęzi „przyczyniających się do* M_X *w zerze”.*

Dla hiperpowierzchni w $\mathbb{R}^n$ z $n > 2$ nie mamy aż tak pełnej równoważności. Ażeby pokazać, że M_X osiąga punty osobliwe $\mathrm{Sng}_1 X$ stosujemy techniki zbieżności Kuratowskiego i wynik dotyczący zachowania kościca w rodzinach definiowalnych (artykuł [P7] w recenzji), choć można tu podać też dowód bezpośredni (jednakże bardzo techniczny). Dodatkowo otrzymujemy informację na temat stożka stycznego:

Twierdzenie 23 ([A4] Theorem 4.6)**.** *Jeżeli $X \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem definiowalnym, $0 \in X$ oraz $V := C_0(X)$ ma wnętrze puste i nie jest zawarty w żadnej hiperpowierzchni, to $0 \in \overline{M_X}$ i $C_0(M_X) \supset M_V$.*

Istotna jest tutaj obserwacja, że w rozważanej sytuacji $0 \in \overline{M_V}$ i $\overline{M_V}$ jest stożkiem.

W punktach $\mathrm{Reg}_1 X$ sytuacja się komplikuje i musimy uciekać się do rozważenia kilku przypadków szczególnych (w szczególności otrzymujemy naturalną obserwację, że do hiperpowierzchni klasy $\mathscr{C}^{1,1}$ kościec się nie zbliża, por. [A4] Theorem 4.19). Stosowane tu metody prowadzą do rozważenia uogólnionego, *geometrycznego promienia krzywizny*, któremu jest poświęcona ostatnia, trzecia część opracowania.

W trzeciej części kluczowa jest definicja 4.24 *promienia osiągalności.* Oznaczmy przez V_a przecięcie stożka normalnego do X w a ze sferą jednostkową (jeśli $a \in m(x)$, to $x - a$ leży w stożku normalnym do X w a).

Definicja 24. Definiujemy *słaby promień osiągalności* poprzez

$$r'(a) = \inf_{v \in V_a} r_v(a),$$

gdzie

$$r_v(a) = \sup\{t \geqslant 0 \mid a \in m(a + tv)\}$$

jest *kierunkowym promieniem osiągalności* (inaczej v*-promieniem osiągalności*). Następnie kładziemy

$$\tilde{r}(a) = \liminf_{X \setminus \{a\} \ni x \to a} r'(x)$$

i nazywamy to *granicznym promieniem osiągalności*. Wreszcie *promień osiągalności* jako taki definiujemy poprzez

$$r(a) = \begin{cases} r'(a), & a \in \mathrm{Reg}_2 X, \\ \min\{r'(a), \tilde{r}(a)\}, & a \in \mathrm{Sng}_2 X. \end{cases}$$

Jeśli $a \in \mathrm{int} X$, to stożek normalny $N_a(X) = \{0\}$, zaczem $V_a = \varnothing$, co daje $r'(a) = +\infty$ (jako infimum po zbiorze pustym).

Oczywiście, jeżeli X jest hiperpowierzchnią, to w $a \in \mathrm{Reg}_1 X$ mamy $V_a = \{\nu(a), -\nu(a)\}$, gdzie ν jest lokalnym polem wersorów normalnych.

Konieczność rozpatrzenia kresu dolnego po wszystkich kierunkach normalnych promieni kierunkowych w a wynika z potrzeby uwzględnienia krzywizny zbioru i ma na celu uzyskanie w miarę możliwości skończonej liczby, np. dla $X = \{y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$ mamy $r'(0) = r_{(0,1)}(0) = 1/2 < r_{(-1,0)}(0) = +\infty$.

Wprowadzenie promienia granicznego z kolei jest umotywowane chociażby przykłademzbioru $X = \{y = |x|\}$, dla którego $r'(0) = +\infty$, gdy tymczasem $\liminf_{X \setminus \{0\} \ni x \to 0} r'(x) = 0$. Z drugiej atoli strony, jeśli wziąć $X = ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)) \times \{0\}$, to $\tilde{r}(-1, 0) = +\infty$, a promień kierunkowy daje nam natomiast $\inf_{v \in V_0} r_v(-1, 0) = 1$. To wyjaśnia wzięcie minimum w definicji.

Po przebadaniu własności otrzymanej funkcji $x \mapsto r(x)$ dochodzimy do twierdzenia o jej definiowalności ([A4] Theorem 4.32). Wykazujemy ponadto, że zbiór jej zer pokrywa się ze zbiorem $\overline{M_X} \cap X$ ([A4] Theorem 4.35).

4.3.6. [A5] *O otwartych odwzorowaniach analitycznych i subanalitycznych.*

Badanie zachowania kośćca tj. *medial axis* po deformacji zbioru w duchu artykułu [8] naprowadziło mnie na pewne pytania dot. warunków gwarantujących otwartość odwzorowania subanalitycznego. W 2013 w ramach wymiany profesorów Erasmus podpisanej za moim staraniem pomiędzy Uniwersytetem Jagiellońskim a Uniwersytetem Angers w Angers we Francji, gościł w Krakowie prof. Jean-Jacques Loeb, jak się okazało, zajmujący się podobną problematyką. W wyniku naszej zawiązanej wówczas współpracy powstał artykuł [A5].

Zastosowanie zbieżności Kuratowskiego do charakteryzacji otwartości odwzorowań:

Lemat 25 ([A5] Lemma 3.8)**.** *Niech $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem ciągłym zdefiniowanym na lokalnie domkniętym zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Na to, aby f było* *otwarte na obraz (tj. w $f(\Omega)$ rozważamy topologię indukowaną z $\mathbb{R}^m$) potrzeba i wystarcza, aby włókna $f^{-1}(y)$ były ciągłe w sensie zbieżności Kuratowskiego.*

pozwoliło na uzyskaniem w raczej prosty sposób ([8]) dowodu następującego twierdzenia charakteryzującego otwartość odwzorowania subanalitycznego klasy $\mathscr{C}^1$.

Twierdzenie 26 ([A5] Theorem 3.14)**.** *Niech $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie otwartym odwzorowaniem subanalitycznym, lub definiowalnym w jakiejś strukturze o-minimalnej, i klasy $\mathscr{C}^1$ w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas f jest otwarte wtedy i tylko wtedy, gdy*

(1) $\forall y,\ \dim f^{-1}(y) \leqslant 0$;
(2) *Jakobian* $\mathrm{Jac} f$ *nie jest znakozmienny (ani stale równy zeru).*

Przy założeniu otwartości odwzorowania f do punktu (1) wystarcza już sama ciągłość, a subanalityczność jest założeniem istotnym (zob. przykład 4.11 z [A5]).

Powyższy wynik stanowi przeniesienie na przypadek rzeczywisty podobnej, klasycznej, charakteryzacji otwartości funkcyj holomorficznych. Częściowe wyniki (dla wielomianów i dla funkcyj analitycznych rzeczywistych) były uprzednio uzyskane przez J. M. Gamboę i F. Rongę [15] oraz przez M. W. Hirscha [16].

W dalszej części pracy rozważamy związki pomiędzy otwartością a właściwością odwzorowań analitycznych. W szczególności kierujemy się następującym pytaniem:

Problem. *Jeśli f jest rzeczywistym, właściwym ([9]) (sub)analitycznym odwzorowaniem klasy $\mathscr{C}^1$ pomiędzy $\mathbb{R}$-analitycznymi powierzchniami rzeczywistymi orientowalnymi i f zachowuje orientację, to czy musi mieć skończone włókna?*

Przykład 4.11 z [A5] natychmiast każe skreślić przedrostek „sub" w tym pytaniu.

Twierdzenie 27 ([A5] Theorem 4.5)**.** *Jeśli $f\colon U \to V$ jest odwzorowaniem analitycznym właściwym pomiędzy obszarami $U, V \subset \mathbb{R}^2$ oraz* $\mathrm{Jac} f$ *nie jest znakozmienny i* $\mathrm{Jac} f \not\equiv 0$*, to w przypadku, gdy U jest jednospójny, f ma włókna dyskretne i jest więc odwzorowaniem otwartym.*

Artykuł zawiera szereg nietrywialnych przykładów (w szczególności podrozdział 4.2 podaje ogólną metodę znajdowania pewnego ich typu). Dodatkową motywacją był tu fakt, że właściwie poza przykładem Pinczuka nie są znane przykłady (proste!) otwartych odwzorowań wielomianowych $\mathbb{R}^2$ w siebie, które nie byłyby odwzorowaniami właściwymi.

Praca kończy się dodatkiem, w którym podajemy m.in. kilka dowodów twierdzenia typu Jordana-Brouwera orzekającego, że *zwarta rzeczywista hiperpowierzchnia analityczna nie rozspaja obszaru w $\mathbb{R}^n$* ([A3] Theorem J).

[8]Stosuje się w nim m.in. twierdzenie o rzędzie oraz stopień Brouwera.

[9]Przeciwobraz kompaktu jest kompaktem.

4.3.7. [A6] *Krotność a problem pull-backu.*

Ostatnia prezentowana praca wraca nas do geometrii analitycznej zespolonej. Artykuł [A6] poświęcony jest uogólnieniu wzoru Spodziei z [26], a mianowicie:

Twierdzenie 28 ([A6] Theorem 2.3)**.** *Niech* $p\colon \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \ni (x, y) \mapsto y \in \mathbb{C}^n$ *i niech* $A \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$ *będzie nierozkładalnym zbiorem lokalnie analitycznym wymiaru* k*. Zakładamy, że* $p^{-1}(0) \cap A = \{0\}$*. Wówczas*

$$i(p^{-1}(0) \cdot A; 0) = \tilde{m}_0(p|_A) \cdot \deg_0 p(A).$$

Twierdzenie powyższe łączy *krotność* $i(p^{-1}(0) \cdot A; 0)$ przecięcia izolowanego $p^{-1}(0) \cap A = \{0\}$, liczoną metodą geometryczną wprowadzoną przez Achillesa, Tworzewskiego i Winiarskiego w [1], ze stopniem lokalnym (liczbą Lelonga) rzutu $p(A)$ (jest to zbiór analityczny w zerze na mocy twierdzenia Remmerta o rzucie właściwym) i tzw. *krotnością regularną*

$$\tilde{m}_0(p|_A) = \limsup_{\mathrm{Reg}p(A) \ni y \to 0} \#(p^{-1}(y) \cap A \cap U),$$

gdzie U jest dostatecznie małym otoczeniem zera. Jest to drobna, acz istotna, modyfikacja powszechnie używanej (i nierzadko mylonej z powyższą) *krotności geometrycznej* $m_0(p|_A)$, dla której granicę górną liczymy po $p(A) \ni y \to 0$, a nie tylko po części regularnej zbioru. Zachodzi nierówność $m_0((p|_A) \geqslant \tilde{m}_0(p|_A)$ a przykład 2.1 z [A6] pokazuje, że ta nierówność może być ostra. Oryginalny wzór Spodziei dotyczył przypadku, który uzyskujemy biorąc w podanym twierdzeniu za A wykres funkcji holomorficznej f określonej w otoczeniu zera w $\mathbb{C}^m$ i przyjmującej wartości w $\mathbb{C}^n$. Przy tej interpretacji $p(A)$ to jej obraz, a krotność przecięcia wyraża krotność zera $f^{-1}(0) = \{0\}$. Krotności geometryczna i regularna to w tym wypadku $m_0(f) = m_0(p|_{\mathrm{graf} f})$ i $\tilde{m}_0(f) = \tilde{m}_0(p|_{\mathrm{graf} f})$.

Uzyskany wynik pozwala nam przeprowadzić elementarny dowód ważnego twierdzenia Ebenfelta-Rothschild z pracy [14] dotyczącej obrazów rzeczywistych podrozmaitości analitycznych przez odwzorowania holomorficzne skończone ([10]):

Twierdzenie 29 ([14], [A6] Theorem 1.2)**.** *Niech* $F\colon (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ *będzie kiełkiem odwzorowania holomorficznego skończonego, a* $V \subset \mathbb{C}^m$ *zespolonym kiełkiem analitycznym w zerze. Zakładamy, że* $V = F^{-1}(F(V))$ *tj.* V *jest swoim pełnym pull-backiem, oraz że* V *jest kiełkiem gładkim. Jeżeli jakobian* $\mathrm{Jac}F|_V \not\equiv 0$*, to* $F(V)$ *jest gładki.*

Warto nadmienić, że autorzy [14] stawiają pytanie, czy można opuścić założenie o jakobianie (założenie, że mamy do czynienia z pełnym pull-backiem jest natomiast istotne, por. [A6] Example 1.3). Odpowiedź jest twierdząca w przypadku $\dim V = 1$, albowiem gładkość krzywej analitycznej równoważna

[10] czyli mające skończone włókna. Lokalnie oznacza to właściwość takiego odwzorowania, a co za tym idzie, lokalnie — po wyizolowaniu jednego punktu z włókna — mamy do czynienia z tzw. *nakryciem rozgałęzionym*, tj. poza nigdziegęstym zbiorem analitycznym w obrazie scharakteryzowanym przez spadek liczby punktów we włóknie, nakryciem topologicznym i holomorficznym.

jest jej normalności ([11]), elementarny dowód tego faktu podał po Ebenfelcie i Rothschild Lebl w [17]. Stosowane przez mnie metody w [A6] rzucają nowe światło na problem i dają nadzieję na nowe otwarcie (praca [17] kończy się ciekawą obserwacją na temat braku możliwości rozwiązania problemu metodami algebraicznymi).

Na koniec dodajmy, że dowód twierdzenia wymaga w szczególności powiązania *krotności generycznej* F wzdłuż V, zdefiniowanej jako

$$m_V F = \min\{m_x F \mid x \in V\}$$

z krotnościami geometryczną F i regularną w zacieśnieniu do V:

$$m_0(F) = m_V(F) \cdot \tilde{m}_0(F|_V),$$

oczywiście przy założeniu, że kiełek analityczny V jest pełnym pull-backiem ([A6] Proposition 3.3). Kluczową dla dowodu obserwacją jest to, że nieznikanie Jac$F$ wzdłuż V równoważne jest temu, że $m_V(F) = 1$ ([A6] Lemma 3.4).

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

Poza artykułami [A1]-[A6] jestem

• autorem czterech artykułów i współautorem jednego artykułu [B1]-[B5], wszystkich pięciu opublikowanych w czasopismach z listy JCR,

[B1] Maciej P. Denkowski, *The Łojasiewicz exponent of c-holomorphic mappings*, Ann. Polon. Math. vol. 87 (2005), 63-81;

[B2] Maciej P. Denkowski, *A note on the Nullstellensatz for c-holomorphic functions*, Ann. Polon. Math. vol. 90 (2007), 219-228;

[B3] Maciej P. Denkowski, *Regular separation with parameter of complex analytic sets*, Kodai Math. J. vol. 30 (2007), 429-437;

[B4] Maciej P. Denkowski, *Residue calculus for c-holomorphic functions*, Ark. Mat. vol. 47 (2009), 73-89;

[B5] Ewa Cygan, Maciej P. Denkowski, *Singular points of weakly holomorphic functions*, Bull. Sci. Math. vol. 140 issue 6 (2016), 657-674.

• autorem lub współautorem pięciu artykułów [C1]-[C5] opublikowanych w czasopismach, które w roku publikacji nie znajdowały się na liście JCR,

[C1] Zofia Denkowska, Maciej P. Denkowski, *Kuratowski convergence of the sections of a definable set*, Ricerche Mat. LIII.2 (2004), pp. 291-300;

[C2] Maciej P. Denkowski, *On the order of holomorphic and c-holomorphic functions*, Univ. Iagellon. Acta Math. 45 (2007), 47-61;

[C3] Zofia Denkowska, Maciej P. Denkowski, *A long and winding road to definable sets*, J. Sing. vol. 13 (2015), 57-86;

[C4] Maciej P. Denkowski, *A remark on the intersections of subanalytic leaves*, Opuscula Math. vol. 36 no.4 (2016), 471-479;

[C5] Maciej P. Denkowski, *Sur la connexité de l'axe médian*, Univ. Iagell. Acta Math. vol. 53 (2016), 7-12.

[11]Normalność zbioru analitycznego można zdefiniować analitycznie: każda funkcja holomorficzna na części regularnej zbioru i lokalnie ograniczona przy osobliwościach — czyli *słabo holomorficzna* — jest zacieśnieniem funkcji holomorficznej z otoczenia zbioru w przestrzeni okalającej.

• współautorem jednego rozdziału monografii,

[D1] Zofia Denkowska, Maciej Denkowski, *Fonctions et Ensembles Analytiques*, pierwszy rozdział monografii Z. Denkowska, J. Stasica, *Ensembles Sous-analytiques à la Polonaise*, Hermann Paris, 2007.

• autorem siedmiu preprintów dostępnych na stronie `arxiv.org` recenzowanych obecnie w czasopismach z listy JCR (dwa z nich otrzymały niedawno pozytywne recenzje z wymogiem jednak przeprowadzenia kilku korekt):

[P1] Maciej P. Denkowski, *The complex gradient inequality with parameter*, `arXiv:1403.7444` (2014), w recenzji;
[P2] Maciej P. Denkowski, *On the complex Łojasiewicz inequality with parameter*, `arXiv:1406.1700` (2014), w recenzji;
[P3] Maciej P. Denkowski, *On the growth exponent of c-holomorphic functions with algebraic graphs*, `arXiv:1406.5293` (2014), w recenzji;
[P4] Maciej P. Denkowski, *A c-holomorphic effective Nullstellensatz with parameter*, `arXiv:1406.5310` (2014), w recenzji;
[P5] Maciej P. Denkowski, *The Kuratowski convergence of medial axes*, `arXiv:1602.05422` (2016), w recenzji;
[P6] Maciej P. Denkowski, *On Yomdin's version of a Lipschitz Implicit Function Theorem*, `arXiv:1610.07905` (2016);
[P7] Maciej P. Denkowski, Paulina Pełszyńska, *On definable multifunctions and Łojasiewicz inequalities*, `arXiv:1610.09401` (2016), w recenzji.

• autorem i współautorem dalszych czterech preprintów w trakcie korekty, nieosiągalnych chwilowo w sieci:

[N1] Maciej P. Denkowski, *The Bernstein-Walsh-Siciak theorem for analytic hypersurfaces* (2015);
[N2] Anna Denkowska, Maciej P. Denkowski, *UPC condition with parameter for subanalytic sets* (2015);
[N3] Anna Denkowska, Maciej P. Denkowski, Marta Kornafel, *Linear programming on non-compact polytopes and the Kuratowski convergence with applications to economics* (2016);
[N4] Maciej P. Denkowski, Mihai Tibăr, *Normally embedded spaces* (2016);
[N5] Maciej P. Denkowski, Wiesław Pawłucki, Rafał Pierzchała, *A Wirtinger-type inequality in o-minimal structures and related questions* (2015).

Poniżej omówię pokrótce zawartość opublikowanych prac.

5.1. **Teoria funkcyj c-holomorficznych i efektywne nierówności Łojasiewicza w geometrii zespolonej.**

5.1.1. *Funkcje c-holomorficzne: prace* [B1], [B2], [B4], [C2].

Funkcje *c-holomorificzne* wprowadzone przez Remmerta w jego fundamentalnej pracy o rzutach zbiorów analitycznych zespolonych [25] stanowią jedną z możliwości przeniesienia pojęcia funkcji holomorficznej na zbiory analityczne (czy ogólniej — przestrzenie analityczne), a więc zbiory z osobliwościami. Mieszczą się dokładnie pomiędzy pojęciem funkcji *silnie holomorficznej* (tj. takiej, która lokalnie ma przedłużenie analityczne na otoczenie w przestrzeni okalającej dany zbiór analityczny) a pochodzącym od Cartana pojęciem funkcji *słabo holomorficznej* (czyli takiej, która jest określona i holomorficzna w punktach regularnych oraz lokalnie ograniczona przy osobliwościach).

Definicja 30 (Remmert [25])**.** Funkcją $f\colon A \to \mathbb{C}$ określoną na zbiorze analitycznym $A \subset \Omega$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{C}^m$ jest otwarty, nazywamy *c-holomorficzną*, gdy jest ciągła na A i holomorficzna w punktach regularnych $\mathrm{Reg}A$.

Przy ustalonym zbiorze (kiełku) analitycznym (lub przestrzeni analitycznej) A mamy inkluzje pomiędzy pierścieniami funkcyj kolejno — słabo holomorficznych, c-holomorficznych i silnie holomorficznych: $\mathcal{O}_w(A) \subset \mathcal{O}_c(A) \subset \mathcal{O}(A)$.

Pomimo zainteresowania, jakie te funkcji wzbudziły u Whitney'a, Hervégo czy Łojasiewicza (autorów klasycznych i doskonałych podręczników z geometrii analitycznej zespolonej), funkcje te pozostawały przez długie lata zapoznane. Stały się przedmiotem mojej rozprawy doktorskiej, z której opublikowałem pózniej artykuły [B1], [B2], [B4] jak również [B3] i po części [B5]. Tematyką tą zajmuję się również w najnowszych prepritnach [P2], [P3], [P4].

Funkcje c-holomorficzne mają własności podobne do tych, które znamy z przypadku holomorficznego (np. spełniają zasadę identyczności, zob. [B2]). Jednak brak struktury różżniczkowej w klasie funkcji c-holomorficznych wymusza stosowanie metod czysto geometrycznych w celu uzyskania analogonów odpowiednich wyników. Ot chociażby sam fakt analityczności zbioru zer $f^{-1}(0)$ funkcji c-holomorficznej nie jest w pierwszej chwili oczywisty. Kluczową rolę w dowodach odgrywa charakteryzacja funkcyj c-holomorficznych wśród funkcyj ciągłych na A: są to dokładnie te funkcje, których wykresy są analityczne (stąd np. analityczność $f^{-1}(0)$ jako zbioru utożsamialnego z przecięciem wykresu f z A).

Moje badania skoncentrowały się na liczbowych niezmiennikach biholomorfizmów dla tych funkcji. Chodzi tu przede wszystkim o jakże ważną i cieszącą się niemalejącym od lat powodzeniem nierównością Łojasiewicza w wersji efektywnej: problem jest lokalny, ustalmy tedy kiełek analityczny $(A, 0) \subset \mathbb{C}^m$ i kiełek c-holomorficzny $f\colon (A, 0) \to (\mathbb{C}^k, 0)$ — spełnia on *nierówność Łojasiewicza* w zerze tzn. istnieją takie stałe $\alpha, c > 0$, że dla $x \in A$ w odpowiednio małym otoczeniu zera mamy (por. [B1])

$$||f(x)|| \geqslant c \cdot d(x, f^{-1}(0))^\alpha.$$

Oczywiście w małym otoczeniu zera odległość euklidesowa występująca po prawej jest mniejsza od 1, co oznacza, że można dowolnie zwiększać wykładnik. Minimalny wykładnik, tj. kres dolny wykładników $\alpha > 0$, przy których powyższa nierówność jest spełniona przez f z pewną stałą c w otoczeniu zera oznaczamy $\mathcal{L}(f; 0)$ i nazywamy *wykładnikiem Łojasiewicza* f w zerze. Badania tego wykładnika w przypadku holomorficznym trwają bez mała czterdzieści–pięćdziesiąt lat (wśród autorów prac na ten temat wymieńmy mniej więcej chronologicznie Teissiera, Płoskiego, Chądzyńskiego, Krasińskiego, Ha, Tworzewskiego, Cygan, Spodzieję, Jelonek, Bivià-Ausina, i nie jest to bynajmniej kompletna lista). W przypadku zespolonym, w odróznieniu od rzeczywistego, uzyskuje się różne efektywne oszacowania $\mathcal{L}(f; 0)$ wiążąc ten wykładnik z rzędem znikania funkcji $\mathrm{ord}_0 f$ i jej krotnością lokalną (w przypadku izolowanym to podana przy opisie [A6] liczba $m_0(f)$ blisko związana z rzędem znikania a więc i z odpowiednikami twierdzenia Bezouta dla przypadku holomorficznego; w każdym wypadku definiuje się ją za pomocą teorii przecięć, najlepiej w ujęciu Drapera-Tworzewskiego [13], [32]).

Pierwsza trudność napotkana w przypadku c-holomorficznym to pozorny brak odpowiednika rzędu znikania $\mathrm{ord}_0 f$, czyli stopnia pierwszej niezerowej formy z rozwinięcia f w szereg form jednorodnych w zerze. I tu wkracza geometria: $\mathrm{ord}_0 f$ można zdefiniować jako kres górny tych wykładników $\eta > 0$, dla których $|f(x)| \leqslant \mathrm{const.}||x||^\eta$ w otoczeniu zera na A (zob. [B1] i [C2]). W [B1] pokazujemy za pomocą wielomianów charakterystycznych (uzyskanych z ustawienia wykresu do rzutowania właściwego wzdłuż podprzestrzeni z dziedziny), że supremum jest osiągane i jest liczbą wymierną. Podobnymi technikami uzyskujemy oszacowanie wykładnika $\mathcal{L}(f;0)$ przy użyciu $m_0(f)$, rzędów znikania składowych f i stopnia lokalnego $\deg_0 A$ uogólniające wynik Płoskiego na przypadek c-holomorficzny, tzn. pracując przy założeniu, że A ma stały wymiar k a f ma zero izolowane w zerze. W [C2] z kolei badamy nierówność Łojasiewicza dla funkcji skalarnej pokazując, że $\mathcal{L}(f;0) = \mathrm{ord}_0 f$ również w przypadku c-holomorficznym i że $\mathrm{ord}_0 f$ jest stopniem w zerze *analitycznego cyklu zer* $Z_f = \mathrm{graf} f \cdot (\mathbb{C}^m \times \{0\})$ w sensie Drapera [13] ([12]).

Drugim ważnym wykładnikiem, dla którego poszukuje się efektywnych oszacowań jest wykładnik Nulllstellensatz Hilberta (ponownie możemy wymienić prace takich autorów jak Brownawell, Płoski, Tworzewski, Cygan, Jelonek czy Berenstein i Yger). W artykule [B2] przenosimy Nullstellensatz w wersji Płoskiego-Tworzewskiego oraz w wersji Cygan dla przecięcia niewłaściwego na przypadek c-holomorficzny: jeśli $A \subset \Omega$ ma stały wymiar k a określona na A funkcja c-holomorficzna g znika na zbiorze zer zestawienia funkcyj c-holomorficznych $(f_1, \ldots, f_n)$, to przy założeniu, że przecięcie $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(0)$ jest właściwe (tj. minimalnego możliwego wymiaru: tutaj $k - n$) lub izolowane, mamy $g^{\deg_a Z_f} = \sum_{i=1}^n h_i f_i$ w otoczeniu punktu $a \in f^{-1}(0)$, przy pewnych współczynnikach c-holomorficznych h_i w tym otoczeniu, gdzie $\deg_a Z_f$ to *stopień lokalny cyklu zer* $\mathrm{graf} f \cdot (\Omega \times \{0\}^n)$ (w sensie Drapera [13] lub Achillesa-Tworzewskiego-Winiarskiego [1] odpowiednio; w tym ostatnim przypadku mamy do czynienia z $m_0(f)$). Otrzymujemy również pewną wersję Nullstellensatz dla funkcyj słabo holomorficznych, przy odpowiednio zdefiniowanym zbiorze zer (istotna tu jest charakteryzacja słabej holomorficzności poprzez *konstruowalność* ([13]) wykresu, zob. [B2]).

Powracam do tych zagadnień w wersji z parametrem w preprintach [P2], [P4] jak również [P3], który jest poświęcony szczególnemu przypadkowi fynkcyj c-holomorficznych o wykresach algebraicznych jako uogólnieniu wielomianów (zachodzi odpowiednik twierdzenia Bezouta w tej klasie, gdy zdefiniujemy odpowiednik stopnia jako wykładnik wzrostu w nieskończoności).

---

[12]Cykl analityczny to suma formalna zbiorów analitycznych tworzących rodzinę lokalnie skończoną, z przypisanymi im krotnościami całkowitymi.

[13]Najprościej powiedzieć, że zbiór jest konstruowalny analitycznie, gdy jest lokalnie skończoną sumą różnic zbiorów analitycznych zespolonych.

Siłę metod geometrycznych ukazuje praca [B4] będąca przeniesieniem teorii residuów (w języku prądów analitycznych w ujęciu Coleffa-Herrery) na przypadek c-holomorficzny (gdzie, przypomnijmy nie ma *a priori* żadnych własności różniczkowych do dyspozycji, a na nich opiera się klasyczna teoria wielowymiarowych residuów holomorficznych typu Bochnera-Martinellego). W szczególności otrzymujemy np. odpowiednik *wzoru Poincarégo-Lelonga* w przypadku c-holomorficznym (wszystko opiera się na odpowiednim przejściu przez wykres). Dalszy krok, czyli przeniesienie teorii residuów na przypadek funkcyj słabo holomorficznych został wykonany w pracy doktorskiej Richarda Lärkänga, ucznia Matsa Anderssona.

5.1.2. *Efektywna nierówność Łojasiewicza z parametrem:* [B3].

Omawianą powyżej nierówność Łojasiewicza otrzymujemy dzięki *separacji regularnej* Łojasiewicza wykresu od „podstawy". Otóż dwa zbiory analityczne (czy ogólniej subanalityczne), spełniają warunek separacji regularnej tzn. nie mogą być nieskończenie styczne, czyli w otoczeniu $a \in X \cap Y$, gdzie X, Y są — zgodnie z omawianą sytuacją — zespolone analityczne (takie zbiory są w szczególności subanalityczne), mamy dla pewnych stałych $C, \beta > 0$,

$$d(z,X) + d(z,Y) \geqslant C \cdot d(z, X \cap Y)^{\beta}$$

i podobnie jak wcześniej interesuje nas optymalny wykładnik $\beta > 0$. Dzięki twierdzeniu Łojasiewicza-Wachty w przypadku subanalitycznym, wiadomo, że taka nierówność spełniona jest również z parametrem, tzn. po przekrojach zbiorów $X, Y \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$, przy czym wykładnik jest niezależny od parametru (stała C natomiast na ogół jednak odeń zależy). W pracy [B3] pokazujemy odpowiednik zespolony twierdzenia Łojasiewicza-Wachty [19] metodami czysto zespolonymi (i geometrycznymi) i otrzymujemy wersję efektywną w przypadku przecięć izolowanych w przekrojach. W szczególności podajemy też warunek na uniezależnienie stałej C od parametru i otrzymujemy efektywną nierówność Łojasiewicza dla rodziny c-holomorficznej z zerami izolowanymi. Ta praca stanowi początek naszych badań „z parametrem" rozwijanych potem czy to w przypadku zespolonym, czy rzeczywistym w pracach [A3], [P1]–[P4] i [N2] ([14]). Jest to problematyka ściśle związana z multifunkcjami analitycznymi, a co za tym idzie, w naturalny sposób również ze zbieżnością Kuratowskiego i asymptotyką. W preprincie [P1] badamy *nierówność gradientową* Łojasiewicza w rodzinie holomorficznej ze stałą liczbą Milnora. Preprint [N1] dotyczy prędkości aproksymacji algebraicznej zbiorów analitycznych w duchu Bilskiego [3].

[14]Własność UPC czyli *jednostajnych ostrzy wielomianowych* jako geometryczny warunek na brzeg zbioru grubego gwarantujący, że na tym zbiorze spełniona jest nierówność Markowa, jedna z centralnych nierówności w teorii aproksymacji, wprowadzona została w [21]. W [N2] dowodzimy odpowiednika twierdzenia z [21] z parametrem.

5.1.3. *Osobliwości funkcyj słabo holomorficznych:* [B5].

Jak wspomnieliśmy wyżej, funkcje słabo holomorficzne Cartana są podklasą funkcyj c-holomorficznych Remmerta. Praca [B5] jest poświęcona badaniu dwojakiego typu ich punktów osobliwych: z jednej strony zbioru punktów, w których dana funkcja słabo holomorficzna nie jest silnie holomorficzna, z drugiej tych punktów, w których nie jest ciągła (pierwszy z nich jest analityczny, drugi tylko konstruowalny; podobną problematykę podejmował D. Massey). Ten ostatni zbiór jest ściśle związany z punktami nierozkładalności $A^{\prec}$ rozważanego zbioru analitycznego A. Pokazujemy analityczną konstruowalność zbioru $A^{\prec}$ a następnie badamy skojarzony z nim cykl analityczny.

Dokładniej chodzi o to, że konstruowalnośc funkcji

$$\mu(x) = \#\{\text{składowe nierozkładalne kiełka } (A, x)\}$$

gwarantuje na mocy twierdzenia Tworzewskiego z [32] istnienie jednoznacznie wyznaczonego cyklu analitycznego Z o nośniku ([15]) $|Z| = A$ i takiego, że μ to dokładnie stopień lokalny cyklu Z. Otrzymany cykl w pewnym sensie koduje typy osobliwości zbioru A. Co ciekawe, dostarcza też naturalnych przykładów cykli nieefektywnych czyli takich, których nie wszystkie współczynniki są nieujemne. Twierdzenie Cartana o koherencji pozwala nam również uzyskać twierdzenie charakteryzujące silną holomorficzność kiełków słabo holomorficznych poprzez przestrzeń styczną Zariskiego do domknięcia wykresu: nie może zawierać się w niej oś pionowa.

5.2. **Geometria rzeczywista.**

5.2.1. *Od geometrii subanalitycznej do struktur o-minimalnych:* [C3], [D1], [C4].

Jak wspominałem już wcześniej, artykuł przeglądowy [C3] jest właściwie pierwszym opracowaniem przedstawiającym całą historię topologii ujarzmionej: od zbiorów semi-algebraicznych (z podstawowym wynikiem Tarskiego-Seidenberga), semi-analitycznych (wprowadzonych przez Łojasiewicza), subanalitycznych (zapoczątkowanych i rozwijanych w pierwszym rzucie przez Łojasiewicza, Hardta, Hironakę i Gabriełowa) po struktury o-minimalne (wprowadzone przez van den Driesa z Millerem) i zbiory semi- i subpfaffowskie (wg pomysłu Moussu'ego rozwijane dalej przez Liona, Roche'a i Hajtę), podkreślając różnice ich zastosowania np. w układach dynamicznych (Moussu, Rolin,...) czy optymalizacji (Tamm, Bolte, Daniilidis,...). Wcześniej brałem udział w opracowywaniu książki [D1], w której jestem współautorem pierwszego rozdziału dotyczącego funkcyj i zbiorów analitycznych (rzeczywistych i zespolonych z podkreśleniem różnic). Geometria subanalityczna przeżywa ostatnio renesans za sprawą ponownego zainteresowania ze strony specjalistów od sterowania optymalnego. Jednak zbiory subanalityczne często mylnie traktowane są

[15]Chodzi o sumę mnogościową zbiorów składających się na cykl Z.

jako szczególny przypadek struktury o-minimalnej, a to bez dodatkowego założenia dotyczącego kontroli w nieskończoności (czy ogólniej przy brzegu) jest błędem.

W notce [C4] zajmuję się warunkiem gwarantującym gładkość przecięcia dwu płatów subanalitycznych (tj. podrozmaitości analitycznych i subanalitycznych), ogólniejszym niż warunek transwersalności przecięcia, a wykorzystującym stożek styczny. Jako produkt uboczny otrzymuję pewną zasadę identyczności dla podrozmaitości analitycznych rzeczywistych. Sam problem ma swoje źródła po części w pracach [A4] i [A6].

Do geometrii rzeczywistej i zespolonej jednocześnie należy również preprint [N4], w którym wspólnie z M. Tibărem podajemy warunki konieczne i dostateczne na to, by zespolona hiperpowierzchnia była „zanurzona normalnie" ([16]). Wykorzystujemy przy tym techniki związane z nakryciami rozgałęzionymi. Podobnie preprint [N5], będący wstępem do geometrycznej teorii miary w strukturach o-minimalnych, dotyczy geometrii zarówno rzeczywistej, jak i zespolonej. Dowodzimy nierówności typu Wirtingera szacującej miarę Hausdorffa zbioru definiowalnego i wykorzystujemy to oszacowanie do podania nowego kryterium algebraiczności zespolonego zbioru analitycznego.

5.2.2. *Zbieżność Kuratowskiego przekrojów definiowalnych:* [C1].

Praca [C1] opublikowana jeszcze przed doktoratem zapoczątkowała moje zainteresowanie zbieżnością Kuratowskiego w geometrii subanalitycznej i o-minimalnej. W pewnym sensie była uzupełnieniem prac [11] i [12] stanowiących odpowiedź na pytanie Łojasiewicza o ciągłość przekrojów zbioru subanalitycznego w sensie zbieżności wg miary ([17]). Głównym wynikiem pracy jest warunek konieczny i dostateczny na półciągłość z góry przekrojów zbioru subanalitycznego lub definiowalnego $E \subset \mathbb{R}^k_t \times \mathbb{R}^n_x$, mianowicie $E_{t_0} = \limsup_{t\to t_0} E_t$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim_{(t_0,x)} E > \dim_x E_{t_0}$ dla dowolnego $x \in E_{t_0}$. Porównujemy również zbieżność Kuratowskiego ze zbieżnością wg miary i szacujemy prędkość zbieżności przekrojów komórki subanalitycznej, co ma swoje zastosowania przy aproksymacji (np. takiej jak w [A2]). Naturalną kontynuacją pracy [C1] był artykuł [A2].

Sama zbieżność Kuratowskiego pojawia się jeszcze w preprincie [N3] dotyczącym programowania liniowego i zbieżności Kuratowskiego: otrzymujemy odpowiednik twierdzenia De Giorgiego-Franzoniego o zbieżności minimizerów i przedstawiamy proste zastosowania w ekonomii.

---

[16] Czyli *normally embedded* — pojęcie wprowadzone przez Birbraira i Mostowskiego, chodzi o jednostajną równoważność dla danego zbioru metryki wewnętrznej, „geodezyjnej", i metryki zewnętrznej, euklidesowej.

[17] Przekroje E_t dążą do E_{t_0} wg miary, gdy miara Lebesgue'a różnicy symetrycznej $E_t \div E_{t_0}$ zmierza do zera, gdy $t \to t_0$.

5.2.3. *Szkielety:* [C5].

Notka [C5] zawiera elementarnie przeprowadzony na gruncie topologii ogólnej dowód twierdzenia Fremlina o spójności kośćca obszaru: jeśli $S := M_{\partial D} \cap D$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^n$ jest obszarem, to S jest zbiorem spójnym. Stosujemy proste metody homotopijne, przypominające z punktu widzenia technicznego rozumowania stosowane dla zbieżności Kuratowskiego. Praca [C5] wraz z artykułami [A3], [A4] i preprintami [P6] i [P7] stanowi komplet badań topologicznych nad szkieletami w powiązaniu z geometryczną teorią osobliwości.

Wybrana bibliografia

[1] R. Achilles, P. Tworzewski, T. Winiarski, *On improper isolated intersection in complex analytic geometry*, Ann. Polon. Math. 51 (1990), 21-36;

[2] P. Albano, P. Cannarsa, *Structural properties of singularities of semiconcave functions*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa Sci. Fis. Mat. 28 (1999), 719-740;

[3] M. Bilski, *Approximation of analytic sets with proper projection by Nash sets*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris Sér. 341 no. 12 (2005), 747-750;

[4] L. Birbrair, D. Siersma, *Metric properties of conflict sets*, Houston Journ. Math. 35 no. 1 (2009), 73-80;

[5] H. Blum, *A transformation for extracting new descriptors of shape*, in: Models for the perception of speech and visual form, W. Wathen-Dunn, ed. MIT Press, Cambridge, MA, 1967, 362-380;

[6] L. Bröcker, *Families of semialgebraic sets and limits*, Lecture Notes in Math. vol. 1524, Real Algebraic Geometry, (1992), 146-162;

[7] P. Cannarsa, C. Sinestrari, *Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations, and Optimal Control*, Springer 2004;

[8] F. Chazal i R. Soufflet *Stability and finiteness properties of medial axis and skeleton*, J. Dynam. Control Systems 10.2 (2004), 149-170;

[9] F. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Trans. A. M. S. 205 (1975), 247-262;

[10] B. Kocel-Cynk, W. Pawłucki, A. Valette, *A short geometric proof that Hausdorff limits are definable in any o-minimal structure*, Adv. Geom. vol. 14 (2014), 49-58;

[11] Z. Denkowska, *La continuité de la section d'un ensemble semi-analytique et compact*; Ann. Polon. Math. 37.3 (1980), 231-242;

[12] Z. Denkowska, J. Stasica, *Sur la continuité de la section d'un ensemble sous-analytique*, Univ. Iagell. Acta Math. 24 (1984), 205-208;

[13] R.N. Draper, *Intersection theory in analytic geometry*, Math. Ann. 180 (1969), 175-204;

[14] P. Ebenfelt, L.P. Rothschild, *Images of real analytic varieties by finite maps*, Comm. Anal. Geom. 15(3) (2007), 491-507;

[15] J. M. Gamboa, F. Ronga, *On open real polynomial maps*, J. Pure Appl. Algebra 110 (1996), no. 3, 297-304;

[16] M. W. Hirsch *Jacobians and branch points of real analytic open maps*, Aequationes Math. 63 (2002), no. 1-2, 76-80;

[17] J. Lebl, *Pull-back of varieties by finite maps*, preprint `arXiv:0812.2498v1` (2008);

[18] J.-M. Lion, P. Speissegger, *A geometric proof of the definability of the Hausdorff limits*, Selecta Math. (N. S.) 10 no. 3 (2004), 377-390;

[19] S. Łojasiewicz, K. Wachta, *Séparation régulière avec un paramètre pour les sous-analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. 30 (1982), no. 7-8, 325-328;

[20] J. Nash, *Real algebraic manifolds*, Ann. Math. 56 (1952), 405-421;

[21] W. Pawłucki, W. Pleśniak, *Markov's inequality and $\mathscr{C}^\infty$ functions on sets with polynomial cusps*, Math. Ann. 275 no. 3 (1986), 467-480;

[22] S. Pinchuk, *A counterexample to the strong real Jacobian conjecture*, Math. Z. 217 (1994), 1-4;

[23] J.-B. Poly, G. Raby, *Fonction distance et singularités*, Bull. Sci. Math. 2e série, 108 (1984), 187-195;

[24] S. Rams, *Convergence of holomorphic chains*, Ann. Polon. Math. 65 (1997), 227-234;

[25] R. Remmert, *Projektionen analytischer Mengen*, Math. Ann. 130 (1956), 410-441;

[26] S. Spodzieja, *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent*, Ann. Polon. Math. 73.3 (2000), 257- 267;

[27] G. Stolzenberg. *Volumes, Limits and Extensions of Analytic Varieties*, Lecture Notes in Math. vol. 19, Springer 1966;

[28] M. Tamm, *Subanalytic sets in the calculus of variations*, Acta Math. 146 no. 3-4 (1981), 167-199.

[29] P. Tworzewski, T. Winiarski, *Continuity of intersection of analytic sets*, Ann. Polon. Math. 42 (1983), 387-393;

[30] P. Tworzewski, T. Winiarski, *Limits of algebraic sets of bounded degree*, Univ. Iagell. Acta Math. 24 (1984), 151-153;

[31] P. Tworzewski, *Intersections of analytic sets with linear subspaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 17 (1990), no. 2, 227-271;

[32] P. Tworzewski, *Intersection theory in complex analytic geometry*, Ann. Polon. Math. 62.2 (1995), 177-191;

[33] Y. Yomdin, *On the local structure of a generic central set*, Comp. Math. 43 no. 2 (1981), 225-238.