Kraków, 10 lipca 2017

dr hab. Sławomir Rams
Instytut Matematyki
Uniwersytet Jagielloński

Recenzja w przewodzie habilitacyjnym doktora Macieja Piotra Denkowskiego

I. Rozprawa habilitacyjna. Rozprawa habilitacyjna doktora Macieja Piotra Denkowskiego nosi tytuł: **"Geometryczne aspekty teorii osobliwości i zastosowania zbieżności Kuratowskiego"** i składa się z sześciu prac:

[A1] Maciej P. Denkowski, Rafał Pierzchała, On the Kuratowski convergence of analytic sets, Ann. Polon. Math. 93 no. 2 (2008), pp. 101–112;

[A2] Zofia Denkowska, Maciej P. Denkowski, The Kuratowski convergence and connected components, J. Math. Anal. Appl. (2012) 387 no. 1, pp. 48–65;

[A3] Maciej P. Denkowski, On the points realizing the distance to a definable set, J. Math. Anal. Appl. 378 no. 2 (2011), pp. 592–602;

[A4] Lev Birbrair, Maciej P. Denkowski, Medial axis and singularities, J. Geom. Anal. (2017) DOI 10.1007/s12220-017-9763-x (open access: Springerlink.com; in print for vol. 27 no. 2);

[A5] Maciej P. Denkowski, Jean-Jacques Loeb, On open analytic and subanalytic mappings; Complex Var. Elliptic Equ. vol. 62 no.1 (2017), 27–46;

[A6] Maciej P. Denkowski, Multiplicity and the pull-back problem, Manuscripta Math. vol. 149 (2016), 83-91.

Poniżej omówię pokrótce wyniki zawarte w poszczególnych pracach stanowiących rozprawę.
[A1] Praca [A1] (wspólna z R. Pierzchałą) poświęcona jest zbieżności zbiorów analitycznych zespolonych w sensie Kuratowskiego (jest to naturalne uogólnienie zbieżności w sensie metryki Hausdorffa na przypadek zbiorów, które nie są zwarte). Autorzy definiują stopień zbioru Nasha i dowodzą, że jeżeli stopnie wszystkich zbiorów Nasha w pewnym ciągu zbieżnym w sensie Kuratowskiego mają wspólną majorantę, to granica ciągu także jest zbiorem Nasha (patrz [Thm 3.4, A1]). Autorzy podają również pewne wnioski z [Thm 3.4, A1] dotyczące algebraiczności zbioru granicznego (m.in. [Thm 3.7, A1]).
[A2] W pracy [A2] (wspólnej z Z. Denkowską) autorzy badają zbieżność Kuratowskiego w znacznie szerszym i delikatniejszym kontekście: ciągłości i półciągłości

S.R.

sparametryzowanych definiowalnie rodzin zbiorów definiowalnych i domkniętych. Na uwagę zasługuje tu na przykład [Thm 3.1, A2], które mówi, że funkcja przypisująca przekrojowi zbioru definiowalnego (subanalitycznego) liczbę jego składowych spójnych jest definiowalna (subanalityczna) i jego wzmocnienie dla rodzin jednoparametrowych [Thm 3.7, A2], twierdzenie o półciągłości wymiaru [Thm 3.13, A2] przy dodatkowym założeniu zwartości. Autorzy stosują uzyskane wyniki do badania aproksymacji zbiorów zwartych subanalitycznych zbiorami semialgebraicznymi (patrz [Thm 4.1, A2]) i spójności zbioru granicznego (patrz [§.5, A2]). Praca zawiera także interesujące przykłady.

[A5] Praca [A5] (wspólna z J.-J. Loebem) zawiera przeniesienie charakteryzacji otwartości odwzorowań holomorficznych na przypadek odwzorowań rzeczywistych (patrz [Thm 3.14, A5]) : odwzorowanie subanalityczne $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ klasy $\mathcal{C}^1$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ to obszar, jest otwarte wtedy i tylko wtedy gdy f ma zerowymiarowe włókna i jakobian stałego znaku. Autorzy podają także wzmocnienie dla obszarów dwuwymiarowych [Thm 4.5, A5] i oszacowanie wymiaru włókien w przypadku n-wymiarowym z dodatkowym założeniem o znikaniu $(n-1)$-ej grupy homotopii dziedziny. Te wyniki w pewnym stopniu uzasadniają zainteresowanie autora rozprawy zbieżnością Kuratowskiego - istotnym narzędziem w dowodach jest [Lemma 3.8, A5], który charakteryzuje otwartość odwzorowania w języku zbieżności Kuratowskiego jego włókien.

[A6] Geometria odwzorowań jest także tematem pracy [A6], w której pan Denkowski podaje formułę łączącą krotność przecięcia danego zbioru analitycznego A i włókna projekcji nad punktem z krotnością regularną restrykcji rozpatrywanej projekcji do zbioru A i liczbą Lelonga rzutu zbioru A w rozpatrywanym punkcie (formuła stanowi korektę/naturalne uogólnienie wyników S. Spodziei, R. Drapera i innych). Ciekawym zastosowaniem jest dowód kryterium na zachowywanie gładkości kiełków przez odwzorowanie holomorficzne skończone (zakładamy, że pull-back obrazu kiełka jest gładki i pytamy czy obraz kiełka jest gładki) autorstwa Ebenfelta-Rotschilda. Autor zręcznie stosuje techniki rozwinięte przez Achillesa i Tworzewskiego. Sądzę, że pewne idee tej pracy powinny dać dowód mocniejszego wyniku przy pomocy uogólnionych krotności Samuela dla pierścieni z bigradacją badanych w latach 90' przez Achillesa i Manaresi.

[A3], [A4] Prace [A3] (samodzielna) i [A4] (wspólna z L. Birbrairem) dotyczą własności funkcji odległości od ustalonego zbioru (ewentualnie jej kwadratu, aby uniknąć trudności wynikających z własności pierwiastka kwadratowego) i geometrii punktów realizujących odległość. Trzeba podkreślić, że jest to temat o długiej historii - zajmował się nim na przykład Y. Yomdin, D. Milman, S.G. Krantz, B. Sturmfels i D. Siersma. Należy zauważyć, że pan Denkowski (wspólnie z L. Birbrairem w [A4]) w obu omawianych pracach interesuje się naturalnym problemem, który istotnie różni się od tematyki większości prac innych wymienionych autorów: ci ostatni skupiają się na badaniu funkcji odległości od zbiorów gładkich (podrozmaitości) podczas gdy prace [A3], [A4] dopuszczają zbiory z osobliwościami. W pracy [A3] pan Denkowski dowodzi m.in. (patrz [Thm 2.1, A3]), że dla definiowalnego zbioru $M \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ o lokalnie domkniętych przekrojach po pierwszej zmiennej t istnieje definiowalna rodzina W otoczeń przekrojów M po zmiennej t, taka, że przypisanie punktowi (t, x) z rodziny W ogółu punktów z przekroju M_t realizujących odległość zadaje multifunkcję definiowalną, która poza podzbiorem definiowalnym o nigdziegęstych przekrojach E ma jednoelementowe włókna. Jest to naturalne uogólnienie lematu o istnieniu otoczenia na którym odległość od rozmaitości gładkiej jest funkcją gładka na przypadek struktur o-minimalnych. W tej samej pracy pan Denkowski podaje słabszą wersję tego faktu dla zbiorów subanalitycznych ([Thm 3.2, A3]) i wyjaśnia dlaczego wersja z parametrem nie może być prawdziwa bez dodatkowych założeń. W [§.4, A3] dowodzone są również pewne własności multifunkcji punktów najbliższych. Praca [A4] (największa objętościowo w rozprawie) poświęcona jest szkieletowi zbioru domkniętego $X \subset \mathbb{R}^n$, czyli zbiorowi punktów niejednolistności multifunkcji punktów najbliższych. Autorzy otrzymują różne wersje nierówności typu Łojasiewicza (patrz [Thm 2.16, A4]), badają przecięcie kośćca zbioru X z samym zbiorem X, a także zachowanie zbioru środków kul centralnych. W przypadku krzywej definiowalnej w $\mathbb{R}^2$ (patrz m.in. [Thm 3.19, A4], [Thm 3.21, A4]) autorzy uzyskują pełną charakteryzację sytuacji, gdy zbiór przecina domknięcie swojego kośćca. W tym celu wprowadzone zostaje użyteczne w tym kontekście pojęcie funkcji nadkwadratowej. [A4] zawiera również ciekawe wyniki w przypadku hiperpowierzchni w $\mathbb{R}^n$ (patrz n.p. [Thm 4.6, A4], [Prop 4.9, A4]). Wiele sformułowanych dla hiperpowierzchni wyników wykorzystuje pojęcie stożka stycznego i naturalnego uogólnienia pojęcia promienia krzywizny. Praca zawiera także interesujące przykłady. Wątpliwości dotyczące [Thm 3.24, A4] rozwiewa errata dostępna jako preprint arXiv:1705:02788.

Dowody przedstawionych w rozprawie wyników bazują na technikach pochodzących z różnych obszarów matematyki. Na przykład doktor Denkowski biegle wykorzystuje własności krotności przecięcia właściwego i jego uogólnienia na przypadek punktów izolowanych (prace [A1], [A6]), własności struktur o-minimalnych ([A2], [A3], [A4], [A5]), rozkłady komórkowe ([A3]), lemat o wyborze łuku ([A4]). Dowody przedstawione w rozprawie demonstrują także umiejętność pana Denkowskiego do twórczego adaptowania powszechnie znanych pojęć do ogólniejszej sytuacji (n.p. w przypadku [A4] - uogólnień klasycznej geometrii różniczkowej powierzchni w $\mathbb{R}^3$). Na podkreślenie zasługuje staranna redakcja prac zawartych w rozprawie. Większość przykładów i rozumowań cechuje przejrzystość sugerująca spory wysiłek włożony w ich maksymalne uproszczenie.

W rozprawie zauważyć można właściwą dla krakowskiej szkoły teorii osobliwości niechęć do użycia abstrakcyjnych narzędzi - zwłaszcza technik kohomologicznych. Można to postrzegać jako zaletę rozprawy, bo pokazuje zdolność autora do prowadzenia pomysłowych rozumowań i daje bardzo czytelne, intuicyjne wyniki. Zawężenie rozważań do podzbiorów $\mathbb{R}^n$ może być także uzasadnione genezą rozpatrywanych problemów, które częściowo pochodzą z matematyki stosowanej. Z drugiej strony,

S.R

czytelnik ma wrażenie, że pewne przedstawione w rozprawie problemy powinny być badane dla podzbiorów rozmaitości klasy $\mathcal{C}^\infty$ z jakąś dodatkową strukturą (w przypadku odległości od podrozmaitości sugestie jak to robić pojawiają się już u Yomdina w jego pracy z 1981). Prowadziłoby to do wyników użytecznych w szerszym kontekście. Dla przykładu: opis zachowania odległości (w metryce Fubiniego-Study'ego) od podzbioru algebraicznego przestrzeni rzutowej odgrywa pewną rolę we wczesnych dowodach twierdzeń typu Bartha-Lefschetza.

Podsumowanie: Autor podejmuje w rozprawie ciekawe i ważne problemy. Udowodnione w rozprawie twierdzenia i przedstawione fakty istotnie rozszerzają wiedzę na temat odwzorowań analitycznych i geometrii różnych klas zbiorów rozpatrywanych w geometrii analitycznej rzeczywistej i zespolonej. Rozprawa habilitacyjna pana Denkowskiego jest cenna dla dziedziny i dostarcza ciekawych zagadnień i metod, które powinny zaincjować dalsze badania (w szczególności prace [A3] i [A4]) o bardziej efektywnym, wspomaganym komputerowo charakterze.
Na sześć prac stanowiących rozprawę, cztery to prace wspólne (z czego dwie z uznanymi ekspertami: J.J Loebem i L. Birbrairem). Do rozprawy załączone są jednak oświadczenia, które jasno wyjaśniają istotny wkład doktora Denkowskiego w przedstawione wyniki i pozwalają wnioskować na podstawie rozprawy, że pan Denkowski posiada **samodzielność badawczą, znajomość geometrii analitycznej i jej technik dowodowych oraz głęboką intuicję matematyczną**, które powinny cechować samodzielnego pracownika naukowego.

II. Aktywność naukowa, dydaktyczna i organizacyjna. Dorobek naukowy doktora Macieja Piotra Denkowskiego obejmuje 16 prac opublikowanych (z których jedna ukazała się przed uzyskaniem przed M. Denkowskiego tytułu doktora w 2006 roku), 1 pracę przyjętą do druku (preprint [P7], dostępny jako arxiv:1610.09401 ukaże się w J. Math. Anal. Appl.), 7 preprintów dostępnych w bazie xxx.lanl.gov i jeden rozdział w monografii autorstwa Z. Denkowskiej i J. Stasicy. Dwanaście spośród tych prac ukazało lub ukaże się w czasopismach z listy JCR. Rezultaty pana Denkowskiego, które nie zostały przedstawione w rozprawie habilitacyjnej dotyczą:

1. funkcji c-holomorficznych,
2. prądów,
3. efektywnej nierówności Łojasiewicza z parametrem,
4. kiełków osobliwości zanurzonych normalnie.

Lektura tych prac i rozprawy przekonuje, że doktor Denkowski zna szeroką gamę metod o rodowodzie z różnych dziedzin matematyki.

Prace habilitanta wzbudzają zainteresowanie w dobrych ośrodkach matematycznych poza Polską. Doktor Denkowski został zaproszony do przedstawienia swoich wyników na seminariach w Lille, Fortalezie, Angers, Marsylii, Breście, Chambery i Paryżu, miał także wykłady na konferencjach w Lille i Magdeburgu oraz kilku konferencjach w Polsce, przedstawiał plakat na konferencji w Sevilli, odbył krótkie staże w Angers, Lille, Fortalezie, Wiedniu, Sankt Petersburgu, przez rok był post-dokiem w Dijon. W tym kontekście zaskakuje stosunkowo niski indeks Hirscha i mała liczba cytowań. Można je uzasadnić faktem, że wczesne prace pana Denkowskiego skupiają sie na klasycznym ale niesłusznie postrzeganym jako mało nowoczesny temacie funkcji c-holomorficznych - tak jest na przykład w przypadku pracy o prądach rezydualnych ([B4] w autoreferacie), podczas gdy prace o funkcji odległości zostały opublikowane stosunkowo niedawno - spodziewam, się, że prace te będą częściej cytowane w przyszłości.

Pan Maciej Denkowski był organizatorem III Kongresu Młodych Matematyków Polskich i organizuje konferencję Lipschitz Geometry of Singularities w Będlewie. Pisze streszczenia/recenzje dla Mathematical Reviews AMS. Był kierownikiem dwóch grantów MNISW/NCN i głównym wykonawcą w jednym. Jest zatem **aktywny organizacyjnie**.

Na pochwałę zasługuje także **działalność dydaktyczna**: oprócz standardowych zajęć dla studentów studiów pierwszego stopnia w IMUJ, pan Denkowski kilkakrotnie prowadził autorskie dwusemestralne wykłady z geometrii analitycznej zespolonej w ramach studiów II stopnia w IM UJ (również 14-godzinny kurs dla doktorantów w Lille). Zaowocowało to opieką nad dziewięcioma pracami magisterskimi, w tym jedną nagrodzoną III nagrodą w konkursie im. J. Marcinkiewicza PTM.

III. Konkluzja. Uważam, że zarówno rozprawa habilitacyjna pana doktora Macieja Piotra Denkowskiego, jak i pozostałe jego osiągnięcia spełniają wszystkie wymogi Ustawy o tytule naukowym i stopniach naukowych konieczne do uzyskania stopnia doktora habilitowanego. Wnioskuję o dopuszczenie doktora Macieja Piotra Denkowskiego do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Stefan Rams