Andrzej Weber
Instytut Matematyki UW
Banacha 2, 02-097 Warszawa

Warszawa 30 czerwca 2017

Recenzja w przewodzie habilitacyjnym dra Grzegorza Kapustki

Grzegorz Kapustka uzyskał dyplom magistra matematyki w roku 2003 na Uniwersytecie Jagielońskim. Cztery lata później obronił pracę doktorską pt. „Primitive contractions of Calabi-Yau three-folds" napisaną pod kierunkiem prof. Sławomira Cynka z UJ. Dorobek habilitanta przedstawiony do oceny składa się z czterech prac: jedna jest samodzielna, a pozostałe trzy napisane z Michałem Kapustką oraz z innymi współautorami. Jedna z tych prac stanowi dodatek do pracy samodzielnej. Ponadto habilitant posiada znaczący dorobek naukowy udokumentowany publikacjami, który równie dobrze mógłby być włączony do rozprawy habilitacyjnej, gdyż tematycznie jest blisko związany z głównym przedmiotem rozprawy.

Tematem rozprawy są „Projektywne modele rozmaitości hiper-kählerowskich". Zagadnienie jest bardzo wąskie i omawiane prace ściśle go dotyczą. Z mojego punktu widzenia (nie jestem ekspertem w tej dziedzinie) podstawowym problemem teorii rozmaitości hiper-kählerowskich jest bardzo mała ilość przykładów pozwalających zrozumieć strukturę tych obiektów. Dlatego też każda nowa, efektywna konstrukcja jest szczególnie ceniona przez specjalistów. Tym bardziej wartościowe są wyniki opisujące rodziny rozmaitości hiper-kählerowskich, lub wręcz opisujące przestrzenie moduli. Równie ważne są rezultaty pokazujące, że obiekt o danych własnościach nie może istnieć. Nawet w wymiarze cztery podstawowe pytania pozostają otwarte. Nie wiadomo czy numeryczne niezmienniki determinują typ deformacyjny. Jednym słowem, tematyka rozprawy habilitacyjnej dotyczy obiektów bardzo specjalnych, których istnienie jest w pewnym sensie zbiegiem sprzyjających okoliczności, obiektów posiadających niezwykłe własności. Konstrukcje uzyskane przez habilitanta są bardzo specyficzne i bardzo nietrywialne.

Omówienie treści rozprawy

Analiza rozmaitości hiper-kählerowskich przedstawiona przez habilitanta oparta jest na badaniu „modeli rzutowych", to znaczy obrazów przy biwymiernym odwzorowaniu w przestrzeń rzutową zadanym przez pewien system liniowy. Istotne miejsce w rozważaniach autora zajmuje hipoteza O'Grady'ego przewidująca, że:

Rozmaitości hiper-kählerowskie wymiaru cztery, dla których druga liczba Bettiego jest równa 23 są deformacyjnie równoważne ze schematem Hilberta dwóch punktów na powierzchni K3.

Praca [K2] poświęcona jest czterowymiarowym rozmaitościom hiper-kählerowskim z liczbą Bettiego $b_2 = 23$. Przy dodatkowych numerycznych założeniach badany jest hipotetyczny obraz odwzorowania w $\mathbb{P}^5$ zadanego przez systemy liniowe definiowane przez O'Grady'go. Otrzymane jest oszacowanie na stopień obrazu $d \geqslant 9$, przy czym wiadomo, że $d \leqslant 12$. Wyniki dla $d \in [9, 12]$, nadal częściowe, zostały uzyskane w pracy [K1], która jest kontynuacją [K2]. Jednak praca ta jest w trakcie recenzji, więc nie może wchodzić w skład rozważanego tu dorobku.

Badając model rzutowy rozmaitości hiper-kählerowskiej autor pokazuje, że osobliwości takiego modelu mają bardzo specjalne własności. W przypadku gdy $d = 12$ oraz odwzorowanie do $\mathbb{P}^5$ jest morfizmem, osobliwości obrazu wyznaczają jednoznacznie sekstykę mającą specjalne własności, tzw. EPW-sekstykę, która dodatkowo nie jest generyczna w swojej rodzinie.

Praca [K3] (dodatek do [K2]) jest krótka i bardzo elegancka. Skonstruowane jest rozwiązanie osobliwość EPW-sekstyki za pomocą (w miarę) elementarnej geometrii symplektycznej.

Podobne konstrukcje, jednak przeprowadzone w wymiarze sześć, wskazują na związek pomiędzy rozmaitościami hiper-kählerowskimi a osobliwościami ich modeli rzutowych. W pracy [K5] definiowane są EPW-sześciany – także za pomocą elementarnej geometrii symplektycznej. Pewne podwójne nakrycia EPW-sześcianów są rozmaitościami hiper-kählerowskimi, co więcej, tworzą one rodzinę stanowiącą składową przestrzeni moduli o pewnych ustalonych danych numerycznych. Składowa ta jest uniwymierna.

Dalsze badanie EPW-sześcianów doprowadziło do rozwiązania pewnego klasycznego problemu, problemu Morina, dotyczącego pełnych rodzin (konfiguracji) płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$. Każde dwa elementy tej konfiguracji mają się przecinać, oraz taka konfiguracja ma być maksymalną o tej własności. Klasyfikacja takich konfiguracji jest związana z geometrią symplektyczną 20-wymiarowej przestrzeni $\wedge^3\mathbb{C}^6$ wraz z zanurzonym w niej grassmaniannem $G(3, 6)$ (tzn. zanurzonym w projektywizacji). O'Grady pokazał, że moc pełnej skończonej rodziny mieści się pomiędzy 10 a 20. W pracy [K4] została skonstruowana rodzina mocy 20, pierwsza o tej własności.

Cytowania i kontekst

Prace Grzegorza Kapsutki są dobrze cytowane. Na 14 prac indeksowanych w MathSciNet przypadają 34 cytowania. Prace, które zostały wydzielone jako rozprawa habilitacyjna nie są jeszcze cytowane, ponieważ zostały opublikowane w latach 2016-2017. Natomiast prace z 2009 i 2010 roku mają po 7 i 8 cytowań. Ich tematyka jest bardzo zbliżona do treści rozprawy. Szkoda, że hablitant nie włączył do rozprawy części prac starszych, w tym nieźle cytowanej [K13], kosztem nieznacznego rozszerzenia tematyki.

Habilitant omawia także prace bardzo nowe zawierające kontynuacje omawianych zagadnień. Choć jedna z nich już jest złożona do recenzji, nie mogą być rozpatrywane jako część rozprawy, gdyż nie ukazały się jeszcze drukiem ani nawet nie zostały przyjęte do publikacji. Pokazuje to, że wyniki omówione w rozprawie nie są ostateczne i habilitant nadal pracuje nad tą tematyką.

Moja opinia

Prace Grzegorza Kapustki w mojej ocenie są wartościowe i ciekawe. Łączą ze sobą klasyczne lub wręcz elementarne geometryczne konstrukcje z bardzo subtelną i drobiazgową analizą. Przedmiotem prac są konkretne obiekty geometryczne, mające wyjątkowe własności i przez to będące atrakcyjne dla matematyka. Drugi aspekt prac to próba dowodu, że pewne rozmaitości hiper-kählerowskie nie mogą istnieć. Tu habilitant uzyskał częściowe wyniki, które być może w przyszłości pozwolą w pełni rozwiązać badany problem O'Grady'ego. Jednak nawet rozwiązanie hipotezy O'Grady'ego wydaje się być kroplą w morzu. W ogólności nie ma szans na ostateczną na klasyfikację rozmaitości hiper-kälreowskich.

Być może ze względu na specyfikę tematyki, trudności techniczne i brak przykładów, na których można by testować hipotezy, uzyskane wyniki nie mają spektakularnego charakteru. Wyjątek stanowi opis jednej składowej przestrzeni moduli sześciowymiarowych rozmaitości hiper-kählerowskich z pracy [K15], opublikowanej w Crelle. Także praca dotycząca konfiguracji Morina stanowi ładną zamkniętą całość.

Narzędzia matematyczne stosowane przez habilitanta są bardzo klasyczne. Budzi respekt sprawność w posługiwaniu się ściśle geometrycznymi argumentami. Z drugiej strony można odnieść wrażenie, że habilitant unika nowocześniejszych metod. Metody homologiczne odgrywają nieznaczną rolę, kategorie pochodne nie pojawiają się, także zagadnienia arytmetyczne nie są rozważane.

Strona redakcyjna prac jest dobra. Problemy są jasno sformułowane i czytelnik ma wrażenie klarowności. Gdy jednak skoncentrować się na szczegółach, to często argumenty wymagają sporego samodzielnego wysiłku. Czasem sformułowania użyte w pracy mogą wprawić czytelnika w zakłopotanie. Przykładem jest zdanie z samego wstępu pracy [K2]:

„Recall that EPW *sextic* $S_A \subset \mathbb{P}^5 =: \mathbb{P}(W)$ is a special sextic hypersurface defined as determinant of the morphism

$$A \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5} \to \Omega^2_{\mathbb{P}^5}(3) \subset \mathbb{P}(W) \times \wedge^3 W$$

corresponding to the choice of a 10-dimensional Lagrangian $A \subset \wedge^3 W$ with respect to the the natural symplectic form (as in ...)."

Można tu zrozumieć o co chodzi, lecz sposób przedstawienia jest bardzo specyficzny.

Inne czynniki wpływające na ocenę

Udział międzynarodowych konferencjach, udział w grantach, działalność organizacyjna i popularyzatorska bardzo pozytywnie wpływają na ocenę habilitanta:

- udział w 6-ciu grantach,
- wyróżnienie za pracę doktorską, stypendium START Fundacji na rzecz nauki,
- liczne referaty na konferencjach zagranicznych (kilka rocznie),
- udział w komitetach organizacyjnych międzynarodowych konferencji organizowanych w Polsce w latach 2011, 2012, 2015 i 2016,
- prowadzenie kółek matematycznych i inne formy pracy z licealistami, praca w komitecie Olimpiady Matematycznej,
- opieka naukowa nad studentami (nagroda podopiecznego w konkursie Marcinkiewicza).

Konkluzja

Uważam, że przedłożona rozprawa wraz całym dorobkiem naukowym spełnia kryteria stawiane pracom habilitacyjnym. Dr Grzegorz Kapustka moim zdaniem wniósł znaczący wkład w rozwój teorii rozmaitości hiperkählerowskich. Mimo wspomnianych zastrzeżeń cykl prac wchodzący do rozprawy jak i cały dorobek oceniam bardzo wysoko. Wnioskuję o dopuszczenie dra Kapustkę do dalszych faz przewodu habilitacyjnego.