Piotr Pragacz
profesor
Instytut Matematyczny PAN
ul. Śniadeckich 8
00-656 Warszawa

Recenzja rozprawy habilitacyjnej doktora Grzegorza Kapustki

Pan Grzegorz Kapustka jest matematykiem, specjalizującym się w geometrii algebraicznej, który pracował na Uniwersytecie Jagiellońskim, w Polskiej Akademii Nauk oraz na Uniwersytecie w Zurychu. Za jego specjalności naukowe należy uznać teorię rozmaitości hiperkählerowskich oraz rozmaitości Calabi-Yau.

Tytuł osiągnięcia naukowego dr Grzegorza Kapustki w jego rozprawie habilitacyjnej to "Projektywne modele rozmaitości hiperkählerowskich".

Rozmaitości hiperkählerowskie wraz z torusami i rozmaitościami Calabi-Yau są elementarnymi klockami, z których zbudowana jest każda rozmaitość kählerowska z trywialną pierwszą klasą Cherna. Są one głównym tematem osiągnięcia. Rozmaitości hiperkählerowskie wystepują w parzystych wymiarach zespolonych. W wymiarze 2 są to powierzchnie K3, które były intensywnie badane z punktu widzenia geometrii i arytmetyki.

Ogólnie, zespoloną rozmaitość kählerowską nazywamy hiperkählerowską gdy jest zwarta i jednospójna oraz przestrzeń przekrojów jej snopa 2-form jest generowana przez nigdzie nie znikającą taką formę.

Po powierzchniach K3 naturalnym następnym etapem badań są 4-wymiarowe i 6-wymiarowe rozmaitości hiperkählerowskie. To głównie tych rozmaitości dotyczy osiągnięcie Grzegorza Kapustki. We wszystkich wymiarach parzystych ≥ 4 znane są 2 rodziny: schematy Hilberta n punktów na powierzchni K3 nazwane typu $K3^{[n]}$ oraz schemat Hilberta $n+1$ punktów sumujących się do zera na powierzchni abelowej nazwane typu $K_n(T)$. Daje to 2 rodziny rozmaitości hiperkählerowskich wymiaru 4 (rozmaitości typu $K3^{[2]}$ oraz typu $K_2(T)$). Oprócz tego znane były 3 rodziny w wymiarze 6. Brak jest jednak ogólnych wyników dotyczących ich klasyfikacji. Habilitant bada klasyfikacje tych rozmaitości przy pomocy ich projektywnych modeli.

Ogólna rozmaitość hiperkählerowska nie jest rzutowa, ale gęsty podzbiór w przestrzeni moduli odpowiada rozmaitościom rzutowym. Metoda Habilitanta polega na analizie obrazów rozmaitości hiperkählerowskich przez odwzorowania holomorficzne w przestrzeniach rzutowych. Takie obrazy nazywane są projektywnymi modelami rozmaitości hiperkählerowskich.

Habilitant uzyskał postęp w programie O'Gradyego klasyfikacji 4-wymiarowych rozmaitości hiperkählerowskich oraz zbadał pierwszą pełną rodzinę projektywnych rozmaitości hiperkählerowskich wymiaru 6.

Dla 4-wymiarowych rozmaitości hiperkählerowskich, Guan pokazał, że druga liczba Bettiego $b_2 = 23$ albo $3 \leq b_2 \leq 8$. W przypadku rozmaitości typu $K3^{[2]}$ mamy $b_2 = 23$, natomiast w przypadku typu $K_2(T)$, jest $b_2 = 7$.

Jednym z głównych tematów tej habilitacji jest badanie następującego problemu: Czy rozmaitości hiperkählerowskie wymiaru 4 dla ktorych $b_2 = 23$ są deformacyjnie równoważne ze schematem Hilberta $K3^{[2]}$?

Punktem wyjścia do badań Habilitanta była następująca Hipoteza O'Gradyego: Rozmaitości hiperkählerowskie numerycznie $K3^{[2]}$ są deformacyjnie równoważne ze schematem Hilberta 2 punktów na powierzchni K3.

Przejdźmy teraz do omówienia 6 prac, składających się na osiagnięcie. Będziemy tu korzystali z terminologii oraz Bibliografii zawartych w Autoreferacie.

[K1] On irreducible symplectic 4-folds numerically equivalent to $K3^{[2]}$.

Główny rezultat [K1] orzeka, że jeśli system liniowy $|H|$ dla H jak w [74, (4.0.25)] definiuje biwymierne odwzorowanie

$$\phi_{|H|} : X - -- > Y \subset P^5$$

na obraz, to $|H|$ ma zero-wymiarowy zbior bazowy dlugosci ≤ 3. Ponadto stopień d obrazu $Y \subset P^5$ spełnia warunek $9 \leq d \leq 12$. Zatem aby dowieść hipotezy wystarczy dowieść, że $\phi_{|H|}$ nie może być biwymierne o obrazie równym hiperpowierzchni w P^5 stopnia $9 \leq d \leq 12$. To zagadnienie badane jest w dalszej części pracy.

Innymi słowy, Habilitant pokazał, że projektywne modele ewentualnych kontrprzykładów na hipotezę mogą być hiperpowierzchniami stopni $9 \leq d \leq 11$ albo specjalnymi hiperpowierzchniami stopnia 12.

[K2] On IHS fourfolds with $b_2 = 23$.

Główny rezultat [K2] orzeka: przypuśćmy, że 4-wymiarowa rozmaitość hiperkählerowska z $b_2 = 23$ posiada szeroki dywizor H z $H^4 = 12$ taki, że H wyznacza odwzorowanie biwymierne $\phi_{|H|}$. Istnieje wówczas jedyna sekstyka zawierajaca zbiór osobliwości $\phi_{|H|}(X) \subset P^5$. Ponadto ta sekstyka jest EPW sekstyką. (EPW = Eisenbud, Popescu, Walter)

EPW sekstyka $S_A \subset P^5 = P(W)$ jest zdefiniowana jako wyznacznik morfizmu

$$A \otimes \mathcal{O}_P^5 \to \Omega^2_{P^5}(3) \subset P(W) \times \wedge^3 W,$$

gdzie $A \subset \wedge^3 W$ jest 10-wymiarową podprzestrzenią lagranżowską.

Kontynuując myśl z poprzedniego akapitu, Habilitant pokazał, że hipotetyczne projektywne modele stopnia 12 są ściśle związane z EPW sekstykami.

[K3] Appendix to [K2]; współautor: Michał Kapustka.

W tym użytecznym dodatku przedstawia się geometryczną konstrukcję EPW sekstyk oraz konstrukcje rozmaitości Calabi-Yau będących minimalnym rozwiązaniem osobliwości EPW sekstyk.

[K4] A very special EPW sextic and two IHS fourfolds; współautorzy: Maria Donten-Bury, Bert van Geemen, Michał Kapustka, Jarosław A. Wiśniewski.

W pracy tej autorzy rozwiązują problem Ugo Morina. W roku 1930, Morin sklasyfikował nieskończone nierozkładalne pełne rodziny wzajemnie przecinających się płaszczyzn w P^5. Rodzinę płaszczyzn nazywamy pełną rodziną wzajemnie przecinających się płaszczyzn, jeżeli każde 2 płaszczyzny z rodziny się przecinają, ale nie ma płaszczyzny poza tą rodziną, która przecina wszystkie płaszczyzny z rodziny. Morin pytał o możliwość klasyfikacji skończonych pełnych rodzin płaszczyzn w P^5.

O'Grady pokazal, że dla $10 \leq k \leq 16$ istnieje przestrzeń moduli pełnych konfiguracji k wzajemnie przecinających się płaszczyzn w P^5 o wymiarze $20 - k$. Dowiódł też, że pełna skończona rodzina płaszczyzn ma między 10 a 20 elementów i zapytał jaka jest największa możliwa liczba takich płaszczyzn.

Odpowiedź na to pytanie jest 20 i jest dana w [K4]. Rodzina jest znaleziona przy pomocy projektywnego modelu rozmaitości hiperkählerowskiej skonstruowanej we wcześniejszej pracy Donten-Bury i Wiśniewskiego lub przy pomocy schematu Hilberta dwóch punktów na powierzchni K3 Vinberga. Ten projektywny model jest bardzo specjalną EPW sekstyką w P^5 osobliwą wzdłuż 60 płaszczyzn. Odpowiedni podzbiór 20 płaszczyzn stanowi rozwiązanie problemu O'Gradyego.

[K5] EPW cubes; współautorzy: Atanas Iliev, Michał Kapustka, Kristian Ranestad.

Autorzy konstruują nową 20-wymiarową rodzinę 6-wymiarowych rozmaitości hyperkählerowskich. Elementy tej rodziny są deformacyjnie równoważne ze schematami Hilberta 3 punktów na powierzchni K3. Są one podwójnymi nakryciami specjalnych podrozmaitości grassmannianu $G(3,6)$ kowymiaru 3. Te specjalne podrozmaitości są lagranżowskimi miejscami degeneracji i ich konstrukcja jest analogiczna do EPW sekstyk. Są one nazywane EPW sześcianami. Jako wniosek z pracy otrzymuje się, że przestrzeń moduli spolaryzowanych IHS 6-rozmaitości typu K3, o stopniu Beauville'a-Bogomolova 4 i podzielności 2 jest uniwymierna (te rozmaitości bedące podwójnymi nakryciami EPW sześcianów nazywane są podwójnymi EPW sześcianami).

[K6] Hyperkähler fourfolds and Kummer surfaces; współautorzy: Atanas Iliev, Michał Kapustka, Kristian Ranestad.

Ta praca dotyczy 4-wymiarowych rozmaitości hiperkählerowskich. Badane są w niej degeneracje podwójnych EPW sześcianów. Autorzy pokazują, że schemat Hilberta stożkowych na rozmaitości Fano wymiaru 4, która jest podwójnym nakryciem $P^2 \times P^2$ rozgałęzionym wzdłuż dywizora bistopnia $(2,2)$ posiada P^1-rozwłóknienie gdzie baza jest rozmaitością hiperkählerowską wymiaru 4. Autorzy zbadali te 4-rozmaitości, studiując związane z nimi zdegenerowane EPW sześciany, elementy grup Brauera K3 powierzchni stopnia 2 oraz rozmaitości Verry. Te 4-rozmaitości hiperkählerowskie posiadają naturalne involucje i uzupełniają klasyfikację antysymplektycznych involucji na 4-rozmaitościach hiperkählerowskich typu $K3^{[2]}$.

Prace [K1-K6] z nawiązką spełniaja wymogi osiagnięcia rozprawy habilitacyjnej. Zawierają one rozwiązanie całkowite lub częściowe szeregu ważnych problemów teorii rozmaitości hiperkählerowskich. Prace [K4] i [K5] zawierają kompletne rozwiązania problemu Morina-O'Gradyego oraz wskazanie pełnej rodziny 6-wymiarowych rozmaitości hiperkählerowskich, która powinna odegrać ważną rolę w problemach klasyfikacji. Prace [K1], [K2] stanowią ważny postęp w kierunku hipotezy O'Gradyego o rozmaitościach 4-wymiarowych. Trzeba powiedzieć, ze jest to bardzo trudna tematyka i nawet mały postęp wymaga sporego wysiłku.

W ostatnich latach Habilitant współorganizuje szereg stojących na wysokim poziomie konferencji w IM PAN poświęconym rozmaitościom hiperkählerowskim i gromadzących światową czołówkę matematyków w tej tematyce.

W dorobku naukowym Pana Grzegorza Kapustki poza osiagnięciem na uwagę zasługują wyniki o rozmaitościach Calabi-Yau. W ostatnich latach te wyniki są reprezentowane przez prace:

[K12] Projections of del Pezzo surfaces and Calabi-Yau threefolds

[K11] Calabi-Yau threefolds in P^6; współautor Michał Kapustka

[K7] Arithmetically Gorenstein Calabi-Yau threefolds in P^7; współautorzy: Stephen Coughlan, Łukasz Gołębiowski, Michał Kapustka.

Prace Habilitanta o rozmaitościach Calabi-Yau zawierają szereg ważnych rezultatów.

Konkluzja: bez wątpienia jest to wyróżniajaca się rozprawa, spełniająca wszelkie wymogi stawiane habilitacjom. Bardziej formalnie:

Uważam, że rozprawa habilitacyjna Pana Grzegorza Kapustki spełnia ustawowe i zwyczajowe wymogi stawiane tego typu rozprawie i wnoszę o dopuszczenie kandydata do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.

Wnioskuję też o uznanie tej rozprawy za wyróżniającą.

P. Pragacz

Warszawa 3.07.2017 Piotr Pragacz