AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko

Grzegorz Kapustka

2. Dyplomy i stopnie naukowe

- Stopień doktora w zakresie nauk matematycznych w zakresie matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki, 2007.

  Tytuł rozprawy doktorskiej: "Primitive contractions of Calabi–Yau threefolds".

  Opiekun: Prof. S. Cynk (UJ Kraków, PL)
  Recenzenci: Prof. P. Pragacz (PAN Warszawa, PL)
  Prof. J.Wiśniewski (UW Warszawa, PL)
- Dyplom magistra matematyki, Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki, 2003.

3. Historia zatrudnienia w jednostkach naukowych

01.2009–teraz adiunkt na Uniwersytecie Jagiellońskim
09.2015–06.2017 staż podoktorski na Uniwersytecie w Zurychu
09.2014–08.2015 adiunkt w Polskiej Akademii Nauk
09.2011–05.2012 staż podoktorski na Uniwersytecie w Zurychu
09.2010–08.2011 adiunkt w Polskiej Akademii Nauk
09.2007–01.2009 asystent na Uniwersytecie Jagiellońskim.

4. Wskazanie osiągnięcia wynikającego z art. 16 ust. 2 ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. nr 65, poz. 595 ze zm.).

a) Tytuł osiągnięcia naukowego

Projektywne modele rozmaitości hiper-kählerowskich

b) Prace stanowiące osiągnięcie naukowe (w odwrotnym porządku chronologicznym)

[K5] A.Iliev, G.Kapustka, M.Kapustka, K.Ranestad, *EPW cubes*, opublikowana online w Journal für die reine und angewandte Mathematik DOI 10.1515/crelle-2016-0044

[K4] M.Donten-Bury, B.van Geemen, G.Kapustka, M.Kapustka, J.Wiśniewski, *A very special EPW sextic and two IHS fourfolds*, Geometry & Topology DOI: 10.2140/gt.2017..101

[K3] G.Kapustka, M.Kapustka, *Appendix to: On IHS fourfolds with $b_2 = 23$*, Michigan J. Math. 65(1), (2016), 29-33.

[K2] G.Kapustka, *On IHS fourfolds with $b_2 = 23$*, Michigan J. Math. 65(1), (2016), 3-29.

c) Omówienie celu naukowego ww. prac i osiągniętych wyników wraz z omówieniem ich ewentualnego wykorzystania.

W autoreferacie omawiamy również wyniki zawarte w następujących pracach:

[K6] A.Iliev, G.Kapustka, M.Kapustka, K.Ranestad, *Hyperkähler fourfolds and Kummer surfaces*, w recenzji.

[K1] G.Kapustka, *On irreducible symplectic 4-folds numerically equivalent to $(K3)^{[2]}$*, w recenzji.

Wstęp. Rozmaitości hiper-kählerowskie razem z rozmaitościami Calabi–Yau i torusami zespolonymi są cegiełkami, z których może być skonstruowana każda rozmaitość kählerowska z trywialną pierwszą klasą Cherna. W teorii klasyfikacji rozmaitości algebraicznych danego wymiaru rozmaitości o trywialnej pierwszej klasie Cherna zajmują miejsce między dobrze zrozumianym, regularnym zbiorem rozmaitości Fano i nieskończonym, chaotycznym zbiorem rozmaitości generalnego typu. Są one wciąż słabo poznaną klasą, nie wiadomo nawet czy liczba rodzin danego wymiaru jest skończona.

Motywacją do badania rozmaitości o trywialnej pierwszej klasie Cherna jest hipoteza symetrii lustrzanej pochodząca z fizycznej teorii strun. Hipoteza ta przewiduje dualność, która uporządkowuje takie rozmaitości w pary będące swoimi lustrzanymi odbiciami. Możemy obserwować tą dualność na dużym zbiorze przykładów jednak matematyczna teoria nie jest wystarczająco rozwinięta aby udowodnić ogólną postać hipotezy symetrii lustrzanej.

Przedstawiamy badania związane z rozmaitościami hiper-kählerowskimi, rozmaitości Calabi-Yau będą dyskutowane w drugiej części autoreferatu. Rozmaitości hiper-kählerowskie występują w parzystych wymiarach zespolonych. W wymiarze dwa nazywamy je powierzchniami K3. Powierzchnie te są intensywnie badane z punktu widzenia geometrii i arytmetyki (zobacz np. [44, 36, 84]). Ponadto związki geometrii powierzchni K3 z konstrukcjami klasycznej geometrii algebraicznej opisują w swoich pracach między innymi Dolgachev, van Geemen, Huybrechts, Mukai i Nikulin.

Naturalnym następnym etapem badań są czterowymiarowe i sześciowymiarowe rozmaitości hiper-kählerowskie. Znane są dwie rodziny rozmaitości hiper-kählerowskich w wymiarze cztery i trzy rodziny w wymiarze sześć. Nie ma jednak ogólnych wyników dotyczących ich klasyfikacji. Naszym celem jest podjęcie problemu klasyfikacji takich rozmaitości przy pomocy analizy geometrii ich *projektywnych modeli.*

W konsekwencji uzyskujemy postęp w programie O'Gradiego klasyfikacji czterowymiarowych rozmaitości hiper-kählerowskich. Następnie opisujemy i badamy pierwszą pełną rodzinę projektywnych rozmaitości hiper-kählerowskich wymiaru sześć, która powinna odgrywać znaczącą rolę w programie klasyfikacji sześciowymiarowych rozmaitości hiper-kählerowskich. W końcu, przy użyciu specjalnych projektywnych modeli rozmaitości hiper-kählerowskich, rozwiązujemy problem Morina z 1930 konstruując pełną konfigurację dwudziestu wzajemnie przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$.

Rozmaitości hiper-kählerowskie. Zdefiniujmy najpierw główny obiekt naszych badań.

Definicja 1. *Zespoloną rozmaitość X wymiaru parzystego nazywamy rozmaitością hiper-kählerowską jeżeli:*

(1) X jest kählerowska
(2) X jest jednospójna i zwarta
(3) $H^0(X, \Omega_X^2)$ jest generowane przez nigdzie nie znikającą dwu-formę ρ.

W przypadku wymiaru dwa pierwsze założenie wynika z drugiego i trzeciego (zob. [87]). W wyższych wymiarach nie można pominąć pierwszego założenia. Przypomnijmy twierdzenie o klasyfikacji rozmaitości o trywialnej pierwszej klasie Cherna:

Twierdzenie 2. *([4],[10]) Niech X będzie zespoloną rozmaitością kählerowską z trywialną krzywizną Ricciego. Istnieje wówczas nierozgałęzione nakrycie X' rozmaitości X izomorficzne jako rozmaitość kählerowska ze skończonym iloczynem kartezjańskim*

$$T \times \prod V_i \times \prod X_i$$

gdzie T jest torusem zespolonym, V_i są zwartymi rozmaitościami kählerowskimi takimi, że $\dim V_i = m_i$, które są jednospójne z grupą holonomi $SU(m_i)$, oraz X_i są zwartymi rozmaitościami kählerowskimi takimi, że $\dim X_i = 2m_i$, które są jednospójne z grupą holonomi $Sp(m_i)$.

Rozmaitości V_i nazywamy rozmaitościami Calabi–Yau natomiast rozmaitości X_i rozmaitościami hiper-kählerowskimi.

Kodaira pokazał, że w wymiarze dwa wszystkie rozmaitości hiper-kählerowskie są deformacyjnie równoważne ([6]). W wyższych wymiarach sytuacja jest bardziej skomplikowana i nie ma ogólnych wyników klasyfikacyjnych. W każdym wymiarze ≥ 4 znamy ([4]) dwie rodziny: deformacje schematu Hilberta n punktów na danej powierzchni K3 nazywane *typu* $K3^{[n]}$ oraz deformacje schematu Hilberta $n+1$ punktów sumujących się do zera na powierzchni abelowej nazywane *typu* $K_n(T)$. Skonstruowane zostały przez O'Gradiego ponadto dwie rodziny w wymiarach 6 i 10 jako rozwiązania osobliwości odpowiednich przestrzeni moduli snopów na powierzchni abelowej lub powierzchni K3 ([71, 72]).

Fundamentalne własności rozmaitości hiper-kählerowskich są przedstawione w pracach [4] i [32]. Pokazano w szczególności, że forma przecięcia na $H^2(X, \mathbb{Z})$ jest zdefiniowana przez formę kwadratową $q \colon H^2(X, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, która jest prymitywna o sygnaturze $(3, b_2-3)$. Definiujemy ją przez relację Fujiki

$$\int \alpha^{2r} = f_X q(\alpha)^r$$

dla każdego $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$, gdzie $\dim(X) = 2r$. Wtedy $f_X > 0$ nazywamy *stałą Fujiki*. Przypomnijmy, że nie są znane ograniczenia dotyczące możliwych form kwadratowych q oraz stałych Fujiki dla rozmaitości hiper-kählerowskich. Dla danej wiązki liniowej L na X liczbę $q := q(L)$ nazywamy *stopniem Beauville'a Bogomolova (B-B)* wiązki L.

Huybrechts zaobserwował, że istnieje skończenie wiele deformacyjnych klas rozmaitości hiper-kählerowskich wymiaru $2r$, dla których istnieje $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$ takie, że $q(\alpha) > 0$ oraz α^{2r} jest ograniczone. Otrzymujemy, że dla ustalonego $M \in \mathbb{R}$ istnieje skończenie wiele rodzin rozmaitości hiper-kählerowskich takich, że $f_X \leq M$ oraz

$$\min\{q(\alpha) |\ \alpha \in H^2(X, \mathbb{Z}), q(\alpha) > 0\} \leq M.$$

Jest to jeden z powodów sugerujących, że w każdym wymiarze jest skończona liczba rodzin rozmaitości hiper-kählerowskich (zobacz też [50]). W wymiarze cztery Guan pokazał, że jeżeli rozmaitość X jest hiper-kählerowska, to druga liczba Bettiego

$$b_2 = 23 \text{ albo } 3 \leq b_2 \leq 8.$$

W przypadku rozmaitości typu $K3^{[2]}$ druga liczba Bettiego $b_2 = 23$, a w przypadku $K_2(T)$ druga liczba Bettiego wynosi 7. Naturalnym staje się problem klasyfikacji rozmaitości hiper-kählerowskich wymiaru cztery.

Głównym tematem naszych badań nad rozmaitościami hiper-kählerowskimi jest następujący przypadek powyższego problemu.

Problem 3. *Czy rozmaitości hiper-kählerowskie wymiaru 4, dla których $b_2 = 23$ są, deformacyjnie równoważne ze schematem Hilberta dwóch punktów na powierzchni K3?*

Przypomnijmy, że ogólna rozmaitość hiper-kählerowska nie jest rzutowa, jednak gęsty podzbiór w przestrzeni moduli parametryzującej takie rozmaitości odpowiada rzutowym rozmaitościom. Nasze podejście do Problemu 3 polega na analizie obrazów rozmaitości hiper-kählerowskich przez odwzorowania holomorficzne w przestrzeniach rzutowych. Takie obrazy nazywamy *projektywnymi modelami* rozmaitości hiper-kählerowskich. Metoda ta została zainicjowana przez Le Potier [6, VI] w przypadku powierzchni K3 oraz O'Gradiego [74] w przypadku czterowymiarowych rozmaitości hiper-kählerowskich. O'Grady analizował mianowicie szczególny przypadek Problemu 3 - problem klasyfikacji rozmaitości hiper-kählerowskich z tą samą stałą Fujiki i tą samą formą kwadratową q co $S^{[2]}$. Rozmaitości takie nazywamy *numerycznie* $K3^{[2]}$.

Analiza geometrii projektywnych modeli powierzchni $K3$ została zapoczątkowana w pracy [84], gdzie badane były ogólne własności ideałów takich powierzchni w przestrzeniach rzutowych. Następnie Mukai badał konstrukcje projektywnych modeli powierzchni K3 znajdując zależności między ich geometrią a geometrią jednorodnych wiązek na Grasmannianach. W pracach [66], [67], [68] opisał on pełne rodziny wielu spolaryzowanych powierzchni K3 stopni ≤ 38. Z drugiej strony, dzięki pracom Gritsenko, Hulka, Sankarana [38], wiemy, że dla stopnia $2d \geq 122$, przestrzeń moduli spolaryzowanych powierzchni K3 stopnia $2d$ jest generalnego typu. Oznacza to, że ogólna powierzchnia K3 wysokiego stopnia $2d$ nie jest konstruowalna. Podobną własność mają rozmaitości hiper-kählerowskie wyższych wymiarów tzn. przestrzenie moduli spolaryzowanych rozmaitości hiper-kählerowskich typu $K3^{[n]}$ i dużego stopnia B-B są generalnego typu. Naturalnym problemem jest więc opisanie wszystkich konstruowalnych spolaryzowanych rodzin rozmaitości hiper-kählerowskich.

Przedstawiamy w Tabeli 1 znane konstrukcje takich rodzin. Do tabeli dołączyliśmy również opisy odpowiadających rodzin powierzchni K3.

dim $\backslash q$	2	4	6	22	38
8	[59]				
6		[K5]			
4	[75], [48]		[7]	[25]	[47]
2	$X \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^2$	$X_4 \subset \mathbb{P}^3$	$X_{2,3} \subset \mathbb{P}^4$	[66]	[67]

TABELA 1. Projektywne modele rozmaitości hiper-kählerowskich

Czterowymiarowe rzutowych rozmaitości hiper-kählerowskie najmniejszego stopnia B-B $q = 2$ posiadają projektywne modele będące hiperpowierzchniami stopnia 6 w $\mathbb{P}^5$ zwanymi *EPW sekstykami.* Przykłady stopnia B-B $q = 6$ zostały skonstruowane przez Beauvilla i Donagiego jako schematy Hilberta prostych na hiperpowierzchniach stopnia 3 w $\mathbb{P}^5$. Przykłady stopnia B-B $q = 22$ zostały opisane przez Debarre'a i Voisin jako miejsca zerowe cięcia danej wiązki jednorodnej na $G(6, 10)$. Przykłady stopnia B-B $q = 38$ zostały opisane przez Ilieva i Ranestada jako $VSP(X_3, 10)$, gdzie $X_3 \subset \mathbb{P}^5$ jest ogólną kubiką. Rodzina rzutowych ośmiowymiarowych rozmaitości hiper-kählerowskich została opisana przez Ch. Lehn'a, M. Lehn'a, Sorger'a oraz van Straten'a jako baza $\mathbb{P}^2$ "fibracji" na schemacie Hilberta skręconych kubik na czterowymiarowej kubice.

Wiodące hipotezy dotyczące rozmaitości hiper-kählerowskich są opisane w pracach [5], [71], [94]. Mamy nadzieję, że analiza projektywnych modeli tych rozmaitości przyczyni się do znacznego postępu w tej dziedzinie.

Uzyskane wyniki. Punktem wyjścia do moich badań nad rozmaitościami hiper-kählerowskimi była hipoteza O'Gradiego.

Hipoteza 1. *Rozmaitości hiper-kählerowskie numerycznie $K3^{[2]}$ są deformacyjnie równoważne ze schematem Hilberta dwóch punktów na powierzchni K3.*

Opisujemy w [K1, K2] projektywne modele w $\mathbb{P}^5$ możliwych kontrprzykładów do tej hipotezy. Pokazujemy w [K1], że rozważane projektywne modele mogą być hiperpowierzchniami stopnia $9 \le k \le 11$ w $\mathbb{P}^5$ albo bardzo specjalnymi hiperpowierzchniami stopnia 12. Pokazujemy, że hiperpowierzchnie te muszą być nienormalne i opisujemy kohomologie ideałów ich zbiorów osobliwych. Udowadniamy w [K2], że hipotetyczne projektywne modele stopnia 12 są ściśle związane ze specjalnymi hiperpowierzchniami stopnia 6 w $\mathbb{P}^5$ zwanymi EPW sekstykami.

W wymiarze 6 podobnie jak w wymiarze 4 największą wartością drugiej liczby Bettiego jest 23 ([85]). Oczekujemy, tak jak w przypadku wymiaru 4, że przykłady z $b_2 = 23$ będą deformacyjnie równoważne ze schematem Hilberta trzech punktów na powierzchni K3. Pierwszą przeszkodą, był brak znanych konstrukcji projetywnych modeli rozmaitości typu $K3^{[3]}$ o małych stopniach.

W pracy [K5] przedstawiamy konstrukcję pełnej rodziny spolaryzowanych rozmaitości hiper-kählerowskich wymiaru sześć o stopniu B-B $q(L) = 4$. Przypomnijmy, że w przypadku rozmaitości typu $K3^{[3]}$ stopień polaryzacji wynosi $15q(L)^3 = 240$. Równolegle do EPW sekstyk, konstruujemy EPW sześciany za pomocą Lagrange'owskich miejsc degeneracji. Jednak w tym przypadku przestrzenią otaczającą jest Grasmannian $G(3,6)$ oraz rozważamy drugie miejsce degeneracji, co powoduje zwiększenie trudności technicznych w opisie niezmienników takich rozmaitości. Pokazujemy, że naturalne podwójne nakrycia EPW sześcianów są rozmaitościami hiper-kählerowskimi z polaryzacją o stopniu B-B $q = 4$. Takie rozmaitości nazywamy *podwójnymi EPW sześcianami.*

W [K6] rozważamy degeneracje podwójnych EPW sześcianów. Obserwujemy, że istnieją naturalne degeneracje, dla których zbiór osobliwy jest spolaryzowaną rozmaitością hiper-kählerowską Z wymiaru cztery o stopniu B-B $q = 4$. Otrzymujemy w ten sposób rozmaitości hiper-kählerowskie z $q = 4$ dopuszczające antysymplektyczną inwolucję. Opis generycznej czterowymiarowej rozmaitości hiper-kählerowskiej z $q = 4$ pozostaje dalej intrygującym otwartym problemem. Powiązujemy następnie geometrię zdegenerowanych EPW sześcianów z geometrią trójwymiarowych *rozmaitości Verra* V tzn. $(2,2)$ dywizorów na stożku nad zanurzeniem Segre

$$C(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^9.$$

Pokazujemy, że składowa schematu Hilberta stożkowych na V dopuszcza $\mathbb{P}^1$ fibracje o bazie będącej czterowymiarową rozmaitością hiper-kählerowską Z (rozważaną powyżej).

Dzięki badaniu projektywnych modeli rozmaitości hiper-kählerowskich możemy popatrzeć na problemy z klasycznej geometrii algebraicznej z bardziej ogólnego punktu widzenia geometrii hiper-kählerowskiej. W pracy [K4] rozwiązujemy, za pomocą analizy projektywnych modeli rozmaitości hiper-kählerowskich, problem Morina. Przypomnijmy, że w 1930 roku Ugo Morin sklasyfikował nieskończone nierozkładalne pełne rodziny wzajemnie przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$. Rodzinę płaszczyzn nazywamy pełną rodziną wzajemnie przecinających się płaszczyzn, jeżeli każde dwie płaszczyzny z rodziny się przecinają ale nie ma płaszczyzny poza tą rodziną, która przecina wszystkie płaszczyzny z rodziny. W swoich pracach Morin pytał o możliwość klasyfikacji skończonych pełnych rodzin płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$. Ostatni problem został podjęty ponownie przez Dolgachev'a i Markushevich'a [29], którzy, używając Fano modeli powierzchni Enriques'a, znaleźli opisy pełnych rodzin dziesięciu wzajemnie przecinających się płaszczyzn oraz opis rodziny trzynastu takich płaszczyzn.

O'Grady udowodnił w [73], że dla $10 \leq k \leq 16$ istnieje $20 - k$ wymiarowa przestrzeń moduli pełnych konfiguracji k wzajemnie przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$. Pokazał również, że pełna skończona rodzina płaszczyzn liczy między 10 a 20 i zapytał jaka jest największa możliwa liczba takich płaszczyzn. W [K4] rozwiązujemy problem O'Gradiego konstruując pełną rodzinę 20 wzajemnie przecinających się płaszczyzn. Znajdujemy tą konfigurację dzięki analizie projektywnego modelu rozmaitości hiper-kählerowskiej skonstruowanej przez Donten-Bury i Wiśniewskiego [30] albo rozmaitości hiper-kählerowskiej będącej schematem Hilberta dwóch punktów na powierzchni $K3$ Vinberga. Rozważany projektywny model jest bardzo specjalną EPW sekstyką w $\mathbb{P}^5$ osobliwą wzdłuż 60 płaszczyzn. Odpowiedni podzbiór 20 z tych płaszczyzn jest szukaną pełną rodziną wzajemnie przecinających się płaszczyzn.

Kontynuując badania na temat konfiguracji Morina można zauważyć, że pełna rodzina wzajemnie przecinających się k płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$ indukuje trójwymiarową rozmaitość będącą $(2,2)$ dywizorem na $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Można sprowadzić w ten sposób problem Morina do badania konfiguracji punktów podwójnych na $(2,2)$ dywizorze w $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$.

4.1. **O klasyfikacji czterowymiarowych rozmaitości hiper-kählerowskich z drugą liczbą Bettiego $b_2 = 23$.**

Artykuły omówione w tej sekcji: [K1, K2]

Kodaira udowodnił, że wszystkie powierzchnie K3 są deformacyjnie równoważne. W pracy [6] Le Potier podał inny dowód tego faktu w następujących krokach:

(1) pokazał, za pomocą twierdzenia Torelliego, że każda powierzchnia K3 może być zdeformowana do powierzchni K3 X_0 takiej, że $Pic(X_0)$ jest generowane przez L oraz $L^2 = 4$
(2) pokazał, że L zadaje izomorfizm X_0 z kwartyką w $\mathbb{P}^3$.

Przedstawiamy podobne postępowanie w przypadku problemu klasyfikacji rozmaitości hiper-kählerowskich wyższego wymiaru. Pokazujemy najpierw w [K2], że stopień szerokiego dywizora na rozmaitości hiper-kählerowskiej z $b_2 = 23$ ma samoprzecięcie będące liczbą postaci $12k^2$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Ponadto, dla szerokiego dywizora H z minimalnym samoprzecięciem 12, pokazujemy, że $h^0(\mathcal{O}(H)) = 6$. Problem klasyfikacji czterowymiarowych rozmaitości hiper-kählerowskich z $b_2 = 23$ podejmujemy w następujący sposób:

(1) szukamy deformacji X_0, która dopuszcza polaryzację stopnia 12,
(2) badamy czy polaryzacja stopnia 12, na rozmaitości hiper-kählerowskie z $b_2 = 23$ zadaje $2:1$ odwzorowanie na EPW sekstykę.

Badania w pracy [K2] związane są z drugim krokiem w powyższym programie. Pokazujemy przesłanki, że rozmaitości hiper-kählerowskiej z $b_2 = 23$ oraz $H^4 = 12$ powinny być podwójnymi nakryciami EPW sekstyk i w konsekwencji powinny być typu $K3^{[2]}$. Ponieważ nie ma ogólnych wyników dotyczących kształtu formy przecięcia na rozmaitościach hiper-kählerowskich, nie mamy obecnie narzędzi aby wykonać pierwszy krok w powyższym programie. O'Grady ominął tą trudność rozważając specjalną klasę rozmaitości hiper-kählerowskich z $b_2 = 23$. Są to rozmaitości hiper-kählerowskie numerycznie równoważne ze schematem Hilberta dwóch punktów na powierzchni K3.

Przypomnijmy, że dwie rozmaitości hiper-kählerowskie M_1 i M_2 wymiaru $2n$ nazywamy numerycznie równoważnymi, jeżeli istnieje izomorfizm grup abelowych

$$\psi\colon H^2(M_1,\mathbb{Z}) \to H^2(M_2,\mathbb{Z})$$

taki, że $\int_{M_1} \alpha^{2n} = \int_{M_2} \psi(\alpha)^{2n}$, dla każdego $\alpha \in H^2(M_1,\mathbb{Z})$. Rozmaitość numerycznie równoważną z $K3^{[2]}$ nazywamy *numerycznie* $K3^{[2]}$.

Głównym zastosowaniem naszych wyników z [K2] jest postęp w dowodzie Hipotezy O'Gradiego Hipotezy1 mówiącej, że rozmaitość hiper-kählerowska, która jest numerycznie $S^{[2]}$ jest typu $K3^{[2]}$. Wyniki O'Gradiego dotyczące Hipotezy 1 mogą być opisane w następujących krokach ([74]):

(1) pokazanie za pomocą twierdzenia Torelliego [91], że każda czterowymiarowa rozmaitość hiper-kählerowska X może być zdeformowana do rozmaitości hiper-kählerowskiej, która dopuszcza polaryzację H stopnia B-B $q(H) = 2$, która spełnia specjalne warunki opisane w [74, (4.0.25)].
(2) pokazanie, że rozważana polaryzacja H definiuje biwymierne odwzorowanie

$$\varphi_{|H|}\colon X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^5,$$

gdzie $Y \subset \mathbb{P}^5$ jest hiperpowierzchnią stopnia $6 \leq d \leq 12$ albo $\varphi_{|H|}$ jest $2:1$, morfizmem na hiperpowierzchnię stopnia 6 w $\mathbb{P}^5$.

Jeżeli $\varphi_{|H|}$ jest $2:1$, to obraz jest EPW sekstyką co powoduje, że X jest typu $K3^{[2]}$. Aby więc dokończyć dowód hipotezy O'Gradiego wystarczy pokazać, że $\varphi_{|H|}$, dla H spełniającego warunki [74, (4.0.25)], nie może być biwymiernym odwzorowaniem.

W pracach [K1] oraz [K2] prowadzimy rozumowanie nie wprost i zakładamy, że $\varphi_{|H|}$ jest biwymiernym odwzorowaniem wymiernym na hiperpowierzchnię stopnia $6 \leq d \leq 12$. Otrzymujemy sprzeczność w przypadku $d < 9$. Głównym wynikiem [K1] jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4. *Jeżeli system liniowy $|H|$ na X dla H jak w* [74, (4.0.25)], *definiuje biwymierne odwzorowanie*

$$\varphi_{|H|}: X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^5$$

na obraz, to $|H|$ ma zerowymiarowy zbiór bazowy długości $l \leq 3$. Ponadto stopień d obrazu $Y \subset \mathbb{P}^5$ spełnia warunek $9 \leq d \leq 12$.

Przedstawmy główne kroki dowodu Twierdzenia 4:

(1) W przypadku $6 < d \leq 12$ dowodzimy, że obraz $Y \subset \mathbb{P}^5$ odwzorowania $\varphi_{|H|}$ jest nienormalny oraz, że zbiór osobliwy dopuszcza strukturę schematu $\mathscr{C} \subset X' \subset \mathbb{P}^5$ zdefiniowaną przez konduktor normalizacji.
(2) W celu opisania rozmaitości $\mathscr{C} \subset \mathbb{P}^5$ znajdujemy $h^i(\mathscr{I}_{\mathscr{C}}(k))$ dla $i,k \in \mathbb{Z}$. Najprostszą metodą, aby znaleźć te liczby jest zastosowanie formuły projekcji, która działa dla skończonych morfizmów. Odwzorowanie $\varphi_{|H|}\colon X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^5$ nie musi być jednak skończonym morfizmem ponieważ może ściągać krzywe. Dlatego rozważamy generyczną liniową sekcję Y_D rozmaitości $Y \subset \mathbb{P}^5$, która omija obrazy ściągniętych krzywych przez $\varphi_{|H|}$.
(3) Możemy znaleźć w ten sposób kohomologię skręconego ideału krzywej $C \subset \mathbb{P}^3$ będącej liniowym cięciem kowymiaru dwa podrozmaitości $\mathscr{C} \subset \mathbb{P}^5$.
(4) Ostatnim krokiem jest szukanie krzywych mających daną tabelę kohomologii skręconego ideału. Używamy do tego metody "liaison", która jest opisana w [79], [61] i [62]. Badając krzywą dla każdego stopnia osobno otrzymujemy, że taka krzywa nie może istnieć w przypadku $d < 9$.

Przypadek $d = 6$ jest rozważony osobno. Zauważamy również, że w przypadku $d = 12$ lub 11 krzywa o danych kohomologiach istnieje. Ta obserwacja była pierwszym krokiem w pracy [K2]. W przypadku $d = 12$ metody opisane w pracy [K1] oraz metody rozważane przez O'Gradiego w [71, Claim 4.9] nie działają. Odwzorowanie $\varphi_{|H|}$ jest wtedy morfizmem. Obrazem takiego odwzorowania jest nienormalna hiperpowierzchnia stopnia 12, którą dokładnie opisujemy. W pracy [K2] rozważamy ogólniejszy Problem 3 badając rozmaitości hiper-kählerowskich z $b_2 = 23$ i pokazujemy następującą propozycję.

Propozycja 5 ([K2]). *Przypuśćmy, że rozmaitość hiper-kählerowska X, dla której $b_2 = 23$ dopuszcza szeroki dywizor taki, że $H^4 = 12$ oraz H definiuje biwymierny morfizm $\varphi_{|H|}$. Wtedy istnieje jedyna sekstyka S_A zawierająca zbiór osobliwy $\mathscr{C} \subset \mathbb{P}^5$ obrazu $\varphi_{|H|}(X) \subset \mathbb{P}^5$.*

Następnie, aby zrozumieć dokładniej obraz $\varphi_{|H|}(X) \subset \mathbb{P}^5$ w rozważanym przypadku, badamy geometrię sekstyki S_A. Używając monad Beilinsona pokazujemy, że $S_A \subset \mathbb{P}^5$ jest EPW sekstyką.

Przypomnijmy, że *EPW sekstyką* $S_A \subset \mathbb{P}^5 =: \mathbb{P}(W)$ nazywamy specjalną hiperpowierzchnię stopnia 6, której równanie określone jest przez wyznacznik odwzorowania

$$A \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{P}^5} \to \Omega^2_{\mathbb{P}^5}(3) \subset \mathbb{P}(W) \times \wedge^3 W \tag{1}$$

odpowiadającego wyborowi 10-wymiarowej podprzestrzeni Lagrangowskiej $A \subset \wedge^3 W$ dla naturalnej symetrycznej formy η indukowanej przez iloczyn zewnętrzny. Definiujemy teraz zbiór

$$\Theta_A = \{V \in G(3,W)| \ \ V \in G(3,W) \cap \mathbb{P}(A) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 W)\}.$$

Zbiór Θ_A jest pusty dla ogólnego wyboru A i mierzy jak zdegenerowana jest rozważana EPW sekstyka.

Za pomocą tych oznaczeń możemy sformułować następny wynik z [K2], który został pokazany za pomocą teorii Kleimana.

Twierdzenie 6. *Przypuśćmy, że rozmaitość hiper-kählerowska X taka, że $b_2 = 23$ dopuszcza szeroki dywizor, który definiuje odwzorowanie biwymierne $\varphi_{|H|}$ oraz $H^4 = 12$. Wtedy sekstyka S_A dołączona do obrazu $Y \subset \mathbb{P}^5$ jest EPW sekstyką, która nie jest generyczna. Dokładniej stowarzyszony zbiór Θ_A jest niepusty.*

Następnie badamy dokładniej sekstykę S_A w przypadku gdy rozmaitość hiper-kählerowska X jest dodatkowo numerycznie równoważna z $K3^{[2]}$. Naszym celem jest rozstrzygnięcie jakie przestrzenie Lagrangowskie mogą być stowarzyszone z S_A. Używamy w tym celu klasyfikacji EPW sekstyk przedstawionej przez O'Gradiego w [76] oraz [77] uzyskując następującą propozycje.

Propozycja 7. *Przypuśćmy, że hiperpowierzchnia $Y \subset \mathbb{P}^5$ stopnia 12 jest biwymiernym obrazem spolaryzowanej rozmaitości hiper-kählerowskiej (X, H) numerycznie równoważnej z $K3^{[2]}$ takiej, że $H^4 = 12$. Niech $S_A \subset \mathbb{P}^5$ będzie dołączoną EPW sekstyką do $Y \subset \mathbb{P}^5$. Wtedy dla S_A mamy $\dim \Theta_A = 1$, albo S_A jest podwójną wyznacznikową hiperpowierzchnią stopnia 3, albo S_A ma niezredukowaną składową liniową.*

Ostatni wynik daje mocne przesłanki dla prawdziwości Hipotezy 1 ale do dokończenia dowodu potrzebne są nowe metody. Praca [K1] nie została przez długi czas dokończona ponieważ razem z L. Grusonem pracowaliśmy nad uzupełnieniem dowodu w przypadkach $d < 12$, praca ta jest dalej w toku.

4.2. Geometryczna konstrukcja EPW sekstyk.

Artykuł omówiony w tej sekcji: [K3]

W celu zrozumienia rozmaitości rozważanych w [K2] przedstawiamy geometryczną konstrukcję EPW sekstyk. Pokazujemy również konstrukcje rozmaitości Calabi–Yau będących minimalnym rozwiązaniem osobliwości EPW sekstyk.

Niech W będzie 6-wymiarową zespoloną przestrzenią wektorową. Segre odkrył, że naturalne działanie grupy $PGL(W)$ na $\mathbb{P}(\bigwedge^3 W)$ ma cztery orbity $\mathbb{P}(\bigwedge^3 W) \setminus O_1$, $O_1 \setminus O_2$, $O_2 \setminus O_3$ oraz O_3, gdzie $O_1 \supset O_2 \supset O_3$ są podrozmaitościami wymiarów 18, 14, oraz 9. Ponadto $O_3 = G(3, W)$, O_1 jest kwartyką, O_2 zbiorem osobliwym O_1, a O_3 zbiorem osobliwym O_2.

Możemy opisać O_2 jako zbiór 3-form

$$\{[\alpha \wedge \omega] \in \mathbb{P}(\textstyle\bigwedge^3 W) \mid \alpha \in W,\ \omega \in \textstyle\bigwedge^2 W\}.$$

Wnioskujemy, że istnieje naturalna fibracja $\pi\colon O_2 \setminus O_3 \to \mathbb{P}^5$ taka, że domknięcia włókien są 9-wymiarowymi przestrzeniami liniowymi. Dokładniej π jest zdefiniowane następująco:

$$O_2 \setminus O_3 \ni [\alpha \wedge \omega] \mapsto [\alpha] \in \mathbb{P}(W).$$

Niech, jak wcześniej, $A \subset \wedge^3 W$ oznacza 10-wymiarową podprzestrzeń Lagrangowską. Głównym wynikiem [K3] jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 8. *Jeżeli A jest ogólną podprzestrzenią, to obraz $\pi(\mathbb{P}(A) \cap O_2) \subset \mathbb{P}^5$ jest ogólną EPW sekstyką.*

W szczególności $\mathbb{P}(A) \cap O_2$ jest czterowymiarową rozmaitością Calabi–Yau, która jest minimalnym rozwiązaniem osobliwości EPW sekstyki. Znajdujemy system liniowy definiujący to rozwiązanie osobliwości. Udowadniamy wreszcie, że projektywnie dualna rozmaitość do EPW sekstyki jest inną EPW sekstyką.

4.3. Nowa rodzina projektywnych rozmaitości hyper-kählerowskich.

Artykuł omówiony w tej sekcji: [K5]

Pokazaliśmy w [K1, K2], że projektywne modele rozmaitości hiper-kählerowskich mogą być używane do badania problemu klasyfikacji rozmaitości hiper-kählerowskich wymiaru cztery. Jest to jedna z motywacji do badania projektywnych rozmaitości hiperkählerowskich wymiaru 6. Przedstawiamy w tym rozdziale pierwszą znaną konstrukcję pełnej rodziny rozmaitości wymiaru 6 o polaryzacji stopnia B-B $q = 4$. Przez konstrukcję pełnej rodziny rozumiemy konstrukcję generycznego elementu przestrzeni moduli spolaryzowanych rozmaitości tego typu. Nasza metoda jest rozwinięciem wyników zawartych w [K3, K2, 81, 80, 74, 75, 76].

Przedstawmy szkic tej konstrukcji. Niech $A \in LG_\eta(10, \wedge^3 W)$ będzie dziesięciowymiarową podprzestrzenią Lagrange'owską dla formy indukowanej przez iloczyn zewnętrzny gdzie $W \simeq \mathbb{C}^6$. Dla 3-wymiarowej podprzestrzeni $U \subset W$ następująca 10-wymiarowa podprzestrzeń

$$T_U := \wedge^2 U \wedge W \subset \wedge^3 W$$

jest również elementem $LG_\eta(10, \wedge^3 W)$ oraz $\mathbb{P}(T_U)$ jest rzutową przestrzenią styczną do

$$G(3, W) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 W)$$

w $[U]$.

Dla każdego $A \in LG_\eta(10, \wedge^3 W)$ oraz $k \in \mathbb{N}$ rozważamy następujące miejsce degeneracji z naturalną strukturą schematu opisaną w [80]:

$$D_k^A = \{[U] \in G(3, W) \mid \dim A \cap T_U \geq k\} \subset G(3, W). \tag{2}$$

Dla ustalonego $A \in LG_\eta(10, \wedge^3 W)$ schemat D_2^A nazywamy *EPW sześcianem*. Pokazujemy, że jeżeli $A \subset \wedge^3 W$ jest ogólne to D_2^A jest sześciowymiarową rozmaitością, która jest osobliwa dokładnie wzdłuż trójwymiarowej rozmaitości D_3^A oraz D_4^A jest puste. Ponadto D_3^A jest gładkie oraz osobliwości D_2^A wzdłuż D_3^A są typu $\frac{1}{2}(1,1,1)$.

Oznaczmy

$$\Sigma = \{[A] \in LG_\eta(10, \wedge^3 W) | \quad \mathbb{P}(A) \cap G(3,W) \neq \emptyset\}$$
$$\Gamma = \{A \in LG_\eta(10, \wedge^3 W) | \quad \exists [U] \in G(3,W)\colon \dim A \cap T_U \geq 4\}$$
$$LG_\eta^1(10, \wedge^3 W) := LG_\eta(10, \wedge^3 W) \setminus (\Sigma \cup \Gamma).$$

Pokazujemy, że podzbiory Σ, Γ są dywizorami w $LG_\eta(10, \wedge^3 W)$. Więc $LG_\eta^1(10, \wedge^3 W)$ jest gęstym podzbiorem $LG_\eta(10, \wedge^3 W)$. Głównym wynikiem [K5] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 9. *Niech $[A] \in LG_\eta^1(10, \wedge^3 W)$. Wtedy istnieje naturalne podwójne nakrycie Y_A EPW sześcianu D_2^A rozgałęzione wzdłuż zbioru osobliwego D_3^A takie, że Y_A jest rozmaitością hiper-kählerowską typu $K3^{[3]}$ z polaryzacją o podzielności 2 i stopnia Beauville'a-Bogomolova $q = 4$. W szczególności przestrzeń moduli spolaryzowanych rozmaitości hiper-kählerowskich typu $K3^{[3]}$ ze stopniem Beauville'a-Bogomolova $q = 4$ oraz podzielnością 2 jest uniwymierna.*

Przypomnijmy, że są dwa typy polaryzacji na rozmaitościach typu $K3^{[3]}$ ze stopniem B-B $q = 4$, o podzielności 1 oraz 2 ([39]). Opis rodziny z polaryzacją o podzielności 1 pozostaje otwartym problemem. Rozmaitość Y_A nazywamy *podwójnym EPW sześcianem.*

4.3.1. *Zastosowania.* We wspólnym projekcie z M.Kapustką i G.Mongardim badamy geometrię spolaryzowanych rozmaitości hiper-kählerowskich (X,L) typu $K3^{[3]}$ z polaryzacją stopnia B-B $q(L) = 2$. Możemy pokazać, że rzutując odpowiednio zdegenerowany EPW sześcian, z przestrzeni rozpiętej przez część jego zbioru osobliwego, uzyskujemy rodzinę przykładów rozmaitości hiper-kählerowskich z $q = 2$. Pokazujemy w ten sposób, że dla generycznego (X, L) stopnia B-B $q = 2$ polaryzacja L definiuje $2:1$ morfizm na podrozmaitość $Y \subset \mathbb{P}^9$ kowymiaru 3. Możemy również pokazać, że ogólna taka podrozmaitość $Y \subset \mathbb{P}^9$ nie może być przedstawiona jako miejsce degeneracji wiązek Lagrangowskich. Obserwujemy następnie, że rozmaitości mające taki sam B-B stopień q ale inny wymiar są ściśle ze sobą związane (patrz Tabela 1). W szczególności istnieje naturalna degeneracja rozmaitości hiper-kählerowskiej wymiaru n o danym stopniu q, dla której zbiór osobliwy jest rozmaitością hiper-kählerowską wymiaru $n-1$ o tym samym q. Ciąg takich rozmaitości nazywamy Matrioszką.

4.4. **Degeneracje podwójnych EPW sześcianów.**

Artykuł omówiony w tej sekcji: [K6]

W [K6] badamy degeneracje podwójnych EPW sześcianów rozważając poprzednią konstrukcję dla $A \in \Sigma$ tzn. A takiego, że $\mathbb{P}(A) \cap G(3,V) \neq \emptyset$.

Oznaczmy $G(3,V) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 V)$ Grassmannian trójwymiarowych przestrzeni w V. Jeżeli $A \in \Sigma$ jest generyczne ,to $\mathbb{P}(A)$ przecina Grassmannian $G(3,V)$ w dokładnie jednym punkcie $P = [U]$. Oznaczmy przez $T_P = \mathbb{P}(T_U)$ zanurzoną przestrzeń styczną do

$$G(3,V) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 V)$$

w punkcie $P \in G(3,V)$. Zauważmy, że przecięcie

$$T_P \cap G(3,V) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 V)$$

jest stożkiem $C_P \subset \mathbb{P}^9$ o wierzchołku P nad iloczynem Segre $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$. Z drugiej strony można stowarzyszyć z A miejsce degeneracji D_A^k. Pokazujemy, że $C_P \subset D_A^1$ oraz przecięcie $C_P \cap D_A^2$ jest kowymiaru 1 w C_P. Otrzymujemy następującą propozycję.

Propozycja 10. [K6] *Podwójne nakrycie $Y_A \to D_A^2$ indukuje nakrycie*

$$Z_A \xrightarrow{2:1} (C_P \cap D_A^2) \subset \mathbb{P}^9$$

takie, że Z_A jest rozmaitością hiper-kählerowską typu $K3^{[2]}$ o stopniu B-B $q = 4$. Podprzestrzenie Lagrangowskie $A \subset \wedge^3 V$ takie, że $P \in \mathbb{P}(A)$ parametryzują 19-wymiarową rodzinę rozmaitości hiper-kählerowskich z $q = 4$.

Rozmaitość Z_A dla $A \in \Sigma$ może być interpretowana jako zbiór osobliwy zdegenerowanego podwójnego EPW sześcianu Y_A. Można pokazać, że nakrycie

$$Z_A \to (C_P \cap D_A^2)$$

indukuje niesymplektyczną inwolucję więc otrzymujemy analogiczną sytuację do przypadku EPW sekstyk. Można pokazać, że generyczna polaryzacja z $q = 4$ definiuje biwymierne odwzorowanie na czterowymiarową rozmaitość stopnia 48 w $\mathbb{P}^9$. Opis obrazu takiego biwymiernego odwzorowania jest intrygującym otwartym problemem.

4.4.1. *Związek rozmaitości Z_A i czterowymiarowych rozmaitości Verra.* Przedstawmy teraz inne konstrukcje rozmaitości hiper-kählerowskich Z_A. Przypomnijmy że Beauville i Donagi pokazali, że schemat Hilberta prostych zawartych w hiperpowierzchni stopnia 3 w $\mathbb{P}^5$ jest rozmaitością hiper-kählerowską typu $K3^{[2]}$ o stopniu B-B $q = 6$. Opiszemy teraz podobną konstrukcję dla rozmaitości hiper-kählerowskich Z_A.

Rozważmy czterowymiarową *rozmaitość Verry* V tzn. podwójne nakrycie $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ rozgałęzione wzdłuż dywizora typu $(2,2)$. Rozmaitość V jest izomorficzna z przecięciem stożka nad zanurzeniem Segre

$$C(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \cap Q_A \subset \mathbb{P}^9$$

z kwadryką Q_A, która nie przechodzi przez środek stożka. Dobierając układ współrzędnych tak aby $z = 0$ była hiperpłaszczyzną polarną względem wierzchołka stożka do kwadyki Q_A możemy zapisać $Q_A = z^2 - q'$. Kwadryka q' definiuje wtedy naturalnie podprzestrzeń Lagrange'owską $\mathbb{P}(A) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 W)$, która przecina $G(3, W)$ w danym punkcie P. Otrzymujemy w ten sposób odpowiedniość między przestrzeniami Lagrange'owskimi $\mathbb{P}(A)$ zawierającymi P i rozmaitościami Verry

$$V_A \subset C(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^9$$

z dokładnością do izomorfizmu.

Zaczynając od V_A konstrukcja Z_A może być przeprowadzona następująco:

(1) Niech $\mathbb{P}^9 \supset V_A \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ będzie podwójnym nakryciem takim, że rzuty na $\mathbb{P}^2$ indukują dwa odwzorowania $\mathbb{P}^2 \leftarrow V_A \to \mathbb{P}^2$.
(2) Rozważmy $(1,1)$ stożkowe na $F_A \subset \mathbb{P}^9$, które rzutują się na proste przez rzutowania $\mathbb{P}^2 \leftarrow V_A \to \mathbb{P}^2$.
(3) Dwie proste l_1, l_2 w $\mathbb{P}^2$ indukują kwadrykę $Q' \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, czyli trójwymiarową kwadrykę $Q_{l_1,l_2} \subset C(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \cap \mathbb{P}^4$.
(4) Przecięcie $Q_A \cap Q' \subset \mathbb{P}^4$ jest powierzchnią del Pezzo stopnia 4. Każda taka powierzchnia zawiera osiem pęków $(1,1)$ stożkowych.

Twierdzenie 11 ([K6]). *Schemat Hilberta $(1,1)$ stożkowych na V_A dopuszcza $\mathbb{P}^1$ fibrację o bazie Z_A będącej rozmaitością hiper-kählerowską o stopniu B-B $q = 4$, która była skonstruowana w Propozycji 10.*

Powyższa konstrukcja może być porównana z konstrukcją Beauville'a i Donagiego [7] albo z konstrukcją z pracy [59]. Możemy opisać również ścisłą analogię między Z_A a odpowiednią rozmaitością hiper-kählerowską Beauville'a Donagiego pochodzącą od kubiki zawierającej płaszczyznę.

Niech S będzie ogólną powierzchnią K3 stopnia 2. Rozróżniamy trzy typy elementów w podgrupie punktów dwu-torsyjnych w grupie Brauera $Br(S)_2 = (\mathbb{Z}_2)^{21}$ indukujących trzy typy struktur Hodge'a, które są związane z następującymi rozmaitościami:

(1) pełnym przecięciem $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^5$ dla α_1,
(2) czterowymiarową kubiką $X_3 \subset \mathbb{P}^5$ zawierającą płaszczyznę dla α_2,
(3) podwójnym nakryciem V_A rozmaitości $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ rozgałęzionym wzdłuż $(2,2)$ dywizora dla α_3.

Rozważamy przestrzeń moduli $M(S, \alpha_i)$ skręconych snopów na (S, α_i) dla $i = 1, 2, 3$ (zobacz[44]).

(1) $M(S, \alpha_1)$ jest izomorficzne z $K3$ powierzchnią $X_{2,2,2} \subset \mathbb{P}^5$ (zobacz [35]),
(2) $M(S, \alpha_2)$ jest izomorficzne ze schematem Hilberta prostych na odpowiadającej kubice $X_3 \subset \mathbb{P}^5$ zawierającej płaszczyznę (zobacz [60]).

Możemy teraz uzupełnić tą analogię pokazując:

Propozycja 12 ([K6]). *$M(S, \alpha_2)$ jest izomorficzne z bazą $\mathbb{P}^1$ fibracji na schemacie Hilberta $(1,1)$ stożkowych na czterowymiarowej rozmaitości Verry V_A dla odpowiedniego A więc izomorficzne z czterowymiarową rozmaitością hiper-kählerowską Z_A rozważaną powyżej.*

4.4.2. *Zastosowania.* Naszym celem w tym rozdziale jest opisanie związków geometrii EPW sześcianów i rozmaitości hiper-kählerowskich Z_A z konstrukcjami klasycznej geometrii algebraicznej. To pozwala nam spojrzeć na klasyczne problemy z bardziej ogólnego punktu widzenia geometrii hiper-kählerowskiej.

Dostajemy następujący opis kwartyk Kummer'a ([70]):

(1) Rzutowania $\mathbb{P}^2 \leftarrow C_P \rightarrow \mathbb{P}^2$ indukują wymierne $\mathbb{P}^3$ fibracje. Te indukują abelowe fibracje $\mathbb{P}^2 \leftarrow Z_A \rightarrow \mathbb{P}^2$.
(2) Otrzymujemy więc dwie fibracje $\mathbb{P}^2 \leftarrow C_P \cap D_1^A \rightarrow \mathbb{P}^2$ przez kwartyki Kummer'a.

Wniosek 13 ([K6]). *Schemat Hilberta $(1,1)$ stożkowych na trójwymiarowej rozmaitości będącej podwójnym nakryciem $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$ rozgałęzionym wzdłuż $(2,2)$ dywizora dopuszcza $\mathbb{P}^1$-fibrację o bazie izomorficznej z kwartyką Kummer'a.*

Używając wyników z [62] można pokazać, że rozmaitości Z_A występują naturalnie w klasyfikacji rozmaitości hiper-kählerowskich dopuszczających niesymplektyczny automorfizm. Oznaczmy przez $\mathscr{X}$ rodzinę wszystkich rozmaitości postaci Z_A.

Twierdzenie 14 ([K6, 62]). *Niech X będzie rozmaitością hiper-kählerowską typu $K3^{[2]}$, która dopuszcza niesymplektyczny automorfizm rzędu będącego liczbą pierwszą $p \neq 3, 23$. Wtedy X jest w jednej z następujących postaci*

(1) w domknięciu rodziny podwójnych EPW sekstyk
(2) w domknięciu rodziny $\mathscr{X}$
(3) jest izomorficzne z przestrzenią moduli snopów na powierzchni K3 i automorfizm jest indukowany przez automorfizm powierzchni K3.

We wspólnym projekcie z C.Camere, M.Kapustką i G.Mongardim opisujemy geometrycznie rozmaitości hiper-kählerowskie dopuszczające niesymplektyczne automorfizmy w domknięciu rodziny $\mathscr{X}$. Dokładniej, opisujemy dwie niezbadane rodziny inwolucji w takim domknięciu mające niezmiennicze kraty izomorficzne z

$$U(2) \oplus D_4 \quad \text{albo} \quad U(2) \oplus E_8(2).$$

Otrzymujemy w ten sposób uniwymierność rozważanych rodzin.

W pracach Debarre'a i Kuznetsova [26, 27, 28] pokazany jest związek EPW sześcianów z rozmaitościami Gushel-Mukai (GM) tzn. sekcjami kwadratowymi sekcji liniowych stożka nad Grassmanianem $G(2,5)$. Można pokazać, że EPW sześciany i trójwymiarowe rozmaitości GM mają powiązane obszary okresów. Mamy nadzieję, że związki między tymi obiektami pozwolą nam przybliżyć się do hipotezy o niewymierności ogólnej czterowymiarowej rozmaitości GM.

Nasze konstrukcje są również powiązane z inną wiodącą hipotezą klasycznej geometrii.

Hipoteza 2. *Ogólna hiperpowierzchnia stopnia 3 w $\mathbb{P}^5$ jest niewymierna.*

Oczekujemy, że problem wymierności powyższych hiperpowierzchni (rozważany w [36, 57, 95, 44]) jest ściśle związany z geometrią stowarzyszonych, przez konstrukcję Beauville'a Donagiego, rozmaitości hiper-kählerowskich. Wymierne hiperpowierzchnie powinny odpowiadać rozmaitościom hiper-kählerowskim izomorficznym z przestrzenią moduli snopów na powierzchni K3. Z pracy Macri i Stellari [60] wynika, że hiperpowierzchnia stopnia 3 zawierająca płaszczyznę indukuje rozmaitość hiper-kählerowską, która jest przestrzenią moduli skręconych snopów na powierzchni K3. Stąd oczekujemy, że takie hiperpowierzchnie są niewymierne. Hiperpowierzchnie stopnia 3 zawierające płaszczyznę są analogiczne do czterowymiarowych rozmaitości Verra (Propozycja 12). W szczególności w [K6] badamy związki między rozmaitościami Verra a stowarzyszonymi rozmaitościami hiper-kählerowskimi. Mamy nadzieję, że nasze wyniki przyczynią się do postępów w Hipotezie 2. Oczekujemy również, że ogólna czterowymiarowa rozmaitość Verry nie jest wymierna.

Innym przykładem pokazującym jak geometria rozmaitości hiper-kählerowskich jest związana z klasyczną geometrią algebraiczną, jest problem Morina opisany w następnym rozdziale.

4.5. Bardzo specjalna EPW sekstyka i problem Morina.

Artykuł omówiony w tej sekcji: [K4]

Rodzinę płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$ nazywamy *skończoną pełną rodziną przecinających się płaszczyzn w* $\mathbb{P}^5$ jeżeli każde dwie płaszczyzny z tej konfiguracji przecinają się oraz nie ma płaszczyzny spoza tej rodziny, która przecina wszystkie płaszczyzny z tej rodziny.

W 1930 Ugo Morin postawił następujący problem:

Problem 15. *Sklasyfikować skończone pełne rodziny przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$.*

Zaobserwujmy najpierw, że problem Morina jest równoważny z problemem znalezienia Lagrange'owskiej podprzestrzeni $A \subset \wedge^3 W$ takiej, że $A \in \Sigma$ oraz $\mathbb{P}(A) \cap G(3,W)$ jest skończonym zbiorem punktów, które rozpinają $\mathbb{P}(A)$. Wystarczy do tego zauważyć, że dwa punkty w $G(3,W)$ odpowiadają dwóm płaszczyznom w $\mathbb{P}(W)$. Te dwie płaszczyzny przecinają się, jeżeli produkt zewnętrzny odpowiadających form jest 0. Stąd problem Morina jest równoważny z następującym problemem:

Problem 16. *Znaleźć klasyfikację podprzestrzeni Lagrange'owskich $A \in \Sigma$ takich, że $\mathbb{P}(A) \cap G(3,W)$ jest skończonym zbiorem.*

O'Grady [73] pokazał, że przecięcie

$$\mathbb{P}(A) \cap G(3,W)$$

ma moc $k \leq 20$ zakładając, że jest skończone. Pokazał tym samym, że moc skończonej pełnej rodziny przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$ ma moc $10 \leq k \leq 20$ oraz zapytał jaka może być największa moc tego zbioru. Ponadto pokazał istnienie skończonych konfiguracji takich płaszczyzn mocy ≤ 16.

Celem pracy [K4] jest konstrukcja pełnej rodziny dwudziestu przecinających się płaszczyzn. Wtedy, dzięki argumentom z teorii deformacji, możemy pokazać, że istnieją skończone pełne rodziny takich płaszczyzn mocy k dla każdej wartości $10 \leq k \leq 20$.

Rozważana konfiguracja dwudziestu płaszczyzn może zostać wybrana ze składowych zbioru osobliwego projektywnego modelu w $\mathbb{P}^5$ specjalnej rozmaitości hiper-kählerowskiej X_0 skonstruowanej przez M.Donten-Bury i J.Wiśniewskiego [30] lub projektywnego modelu rozmaitości hiper-kählerowskiej $S_0^{[2]}$, gdzie S_0 jest jedną z "najbardziej algebraicznych" powierzchni K3 Vinberga [93]. Opiszmy najpierw konstrukcję rozmaitości X_0. Bellamy z Schedlerem w [8] pokazali, że iloraz pewnego działania grupy

$$G := Q_8 \times_{\mathbb{Z}_2} D_8$$

rzędu 32 na $\mathbb{C}^4$ dopuszcza rozwiązanie symplektyczne. To działanie może być zadane przez macierze o współczynnikach w $\mathbb{Z}[i]$ tak, że dostajemy działanie G na E^4, gdzie E jest krzywą eliptyczną z mnożeniem zespolonym $E := \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})$. Donten-Bury i Wiśniewski [30] pokazali, że istnieje specjalne zanurzenie $G \subset Aut(E^4)$ takie, że iloraz E^4/G dopuszcza rozwiązanie symplektycze X_0 będące czterowymiarową rozmaitością hiper-kählerowską z $b_2(X_0) = 23$.

Naturalnym jest zastosowanie programu klasyfikacji dotyczącego Problemu 3 opisanego w [K2] w celu zbadania rozmaitości X_0. Konstruujemy w tym celu na X_0 szeroki dywizor L o stopniu B-B $q(L) = 2$. Korzystając z wyników [K2] otrzymujemy, że L definiuje odwzorowanie w $\mathbb{P}^5$. Stosując program klasyfikacji opisany w [74, K1, K2] otrzymujemy, że to odwzorowanie jest albo biwymierne albo 2 : 1 z obrazem będącym specjalną EPW sekstyką. Pokazujemy, że pierwszy przypadek nie może zachodzić udowadniając, że X_0 jest typu $K3^{[2]}$. Opiszmy konstrukcję dywizora L krok po kroku:

(1) Znajdujemy najpierw na E^4 G-niezmienniczą polaryzację H i pokazujemy, że z dokładnością do mnożenia przez stałą, jest tylko jedna taka polaryzacja. Okazuje się, że ta rozmaitość abelowa (E^4, H) była znana wcześniej [24, 90]. W szczególności Debarre, [24] pokazał, że istnieje jedyna, jednoznacznie spolaryzowana, rozmaitość abelowa (A_{10}, L) wymiaru 4, która nie jest hiper-elliptycznym Jacobianem oraz dopuszcza maksymalną liczbę 10 punktów podwójnych na symetrycznym dywizorze theta.
(2) Istnieje dokładnie 16 G-niezmienniczych wiązek liniowych na E^4, dla których pierwsza klasa Cherna pochodzi od H. Odpowiadające im dywizory są wzajemie powiązane przez translację o punkty torsyjne w E^4. Oznaczmy jeden z tych dywizorów przez D.
(3) System liniowy $|2D|$ definiuje odwzorowanie w $\mathbb{P}^9$. Otrzymujemy następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc} E^4 & \xrightarrow{\eta} & E^4/G \\ {\scriptstyle |2D|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathbb{P}^{15} & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{P}^5, \end{array}$$

gdzie θ jest odpowiednim rzutowaniem.
(4) Wiązka liniowa $2D$ indukuje naturalnie wiązkę liniową L na X_0. Obserwujemy, że obraz f jest tym samym co obraz odwzorowania zadanego przez wiązkę L. Ponadto obrazem tych odwzorowań jest hiperpowierzchnia stopnia sześć $S \subset \mathbb{P}^5$.
(5) Pokazujemy, że S jest EPW sekstyką osobliwą wzdłuż 60 płaszczyzn. Obrazy 20 osobliwych powierzchni na E^4/G w $S \subset \mathbb{P}^5$ tworzą pełną rodzinę 20 przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$.

Odkrywamy następnie, że hiperpowierzchnia $S \subset \mathbb{P}^5$ jest powiązana z wieloma klasycznymi konstrukcjami w geometrii algebraicznej:

(1) Istnieje 16 hiperpłaszczyzn H_i w $\mathbb{P}^5$ takich, że $S \cap H_i \subset \mathbb{P}^4$ jest hiperpowierzchnią Segre stopnia 3. Jest to kubika z maksymalną liczbą 10 punktów podwójnych. Więcej jej własności zostało przedstawionych w [23].
(2) Jest projektywnie samodualna oraz zawiera 16 punktów osobliwych mających stożki styczne będące stożkami nad kwartyką Igusy.
(3) Jest niezmiennicza na naturalne działanie Σ_6 permutujące współrzędne w $\mathbb{P}^5$. Jest sześć wyborów konfiguracji 20 przecinających się płaszczyzn wśród 60 osobliwych płaszczyzn na S.
(4) S może być otrzymana jako obraz $S_0^{[2]}$ odwzorowanego przez naturalny system liniowy, gdzie S_0 jest powierzchnią K3 Vinberga rozważaną w [93]. Otrzymujemy w ten sposób, że $S_0^{[2]}$ może być traktowane jako naturalne rozwiązanie osobliwości E^4/G. To daje nam geometryczną interpretację wyników [8, 30] na temat symplektycznych rozwiązań osobliwości ilorazowych.

4.5.1. *Zastosowania.* Po znalezieniu pełnej rodziny dwudziestu przecinających się płaszczyzn w $\mathbb{P}^5$ pojawiają się inne naturalne problemy.

Problem 17. *(1) Czy pełna konfiguracja dwudziestu płaszczyzn jest jedyna?*
(2) Znaleźć opisy pełnych rodzin przecinających się płaszczyzn o mocy $k < 20$.

Obserwujemy, że powyższe problemy można uprościć używając wyników z [K6]. Istotnie, jeżeli $A \in \Sigma$ jest podprzestrzenią Lagrange'owską $A \subset \wedge^3 W$ taką, że podzbiór

$$\mathscr{P}_A := \mathbb{P}(A) \cap G(3, W) \subset \mathbb{P}(\wedge^3 W)$$

jest skończonym zbiorem. Ustalmy punkt $P \in \mathscr{P}_A$ w tym przecięciu. Tak jak w sekcji 4.4.1 przyporządkowujemy dla A oraz P czterowymiarową rozmaitość Verry $V_A = C(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \cap Q_A$.

Twierdzenie 18. *Każdy punkt w przecięciu $\mathscr{P}_A \backslash \{P\}$ indukuje osobliwy punkt na odpowiadającej rozmaitości Verry V_A.*

W szczególności, podprzestrzeń Lagrang'owska A taka, że $\mathbb{P}(A) \cap G(3, W)$ składa się z 20 punktów indukuje czterowymiarową rozmaitość Verry V_A z 19 punktami podwójnymi.

Teraz rozmaitość Verry dopuszcza dwa rzutowania

$$\mathbb{P}^2 \leftarrow V_A \rightarrow \mathbb{P}^2,$$

które indukują dwie struktury fibracji na V_A o włóknach będących kwadrykami. Miejsce degeneracji każdej z tych fibracji jest krzywą stopnia 6. Dostajemy w ten sposób dwie krzywe: $S_A \subset \mathbb{P}^2$ oraz $S'_A \subset \mathbb{P}^2$. Można zaobserwować, że punkty osobliwe na V_A rzutują się na punkty osobliwe S_A oraz punkty osobliwe na S'_A. Ponadto ogólnie nad punktem podwójnym S_A mamy jeden punkt podwójny na V_A, a nad punktem potrójnym S_A cztery takie punkty.

Otrzymujemy w ten sposób, że krzywe stopnia 6 stowarzyszone z V_A, z 19 osobliwymi punktami, powinny być pełnymi czworokątami (tzn. czworokątami razem z przekątnymi). Przypomnijmy, że powierzchnie K3 powstałe przez rozwiązanie osobliwości podwójnego nakrycia $\mathbb{P}^2$ rozgałęzionego w rozważanej rozkładalej krzywej stopnia 6 jest powierzchnią Vinberga S_0 ([93]).

W ten sposób problem 17(1) sprowadza się do klasyfikacji czterowymiarowych rozmaitości Verra V_A o danych krzywych degeneracji. Natomiast problem 17(2) sprowadza się do badania $(2, 2)$ dywizorów w $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ mających k punktów osobliwych.

5. Omówienie pozostałych osiągnięć naukowo-badawczych.

Prace stanowiące pozostałe osięgnięcia naukowo-badawcze

[K7] S.Coughlan, G.Kapustka, M.Kapustka, Ł.Gołębiowski, *Arithmetically Gorenstein Calabi-Yau threefolds in* $\mathbb{P}^7$, Electronic Research Announcements in Math. Sci. 23, (2016), 52-68.

[K8] S.Dinew, G.Kapustka, M.Kapustka, *Remarks on Mukai threefolds admitting* $\mathbb{C}^*$ *action*, przyjęta do Moscow Math. J.

[K9] G.Kapustka, M.Kapustka, *Bilinkage in codimension* 3 *and canonical surfaces of degree* 18 *in* $\mathbb{P}^5$, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. XVI, (2016), 767-787.

[K11] G.Kapustka, M.Kapustka, *Calabi-Yau threefolds in* $\mathbb{P}^6$, Ann. Mat. Pura Appl. 195(2), (2016), 529-556.

[K12] G.Kapustka, *Projections of del Pezzo surfaces and Calabi-Yau threefolds*, Adv. Geom. 15(2), (2015), 143-158.

[K13] G.Kapustka, M.Kapustka, *A cascade of determinantal Calabi-Yau threefolds*, z appendiksem P. Pragacz, Math. Nachr. 283(12), (2010), 1795-1809.

[K14] G.Kapustka, M.Kapustka, *Fiber products of elliptic surfaces with section and corresponding Kummer fibrations*, Int. J. Math. 20(4), (2009), 401-426.

[K15] G.Kapustka, M.Kapustka, *Equations of log del Pezzo surfaces of index* ≤ 2, Math. Z. 261(1), (2009), 169-188.

Wstęp. W tym rozdziale omawiamy wyniki dotyczące geometrii rozmaitości Calabi–Yau. Przypomnijmy, że z Twierdzenia 2 rozmaitości Calabi–Yau są razem z rozmaitościami hiper-kählerowskimi i zespolonymi torusami cegiełkami, z których można zbudować każdą rozmaitość o trywialnej pierwszej klasie Cherna. Głównymi niezmiennikami pozwalającymi nam odróżnić dwie rodziny trójwymiarowych rozmaitości Calabi–Yau są liczby Hodge'a $h^{1,1}$ i $h^{1,2}$ które oznaczają odpowiednio rangę grupy Picarda oraz wymiar lokalnej przestrzeni deformacji danej rozmaitości Calabi–Yau.

Badamy geometrię projektywnych modeli rozmaitości Calabi–Yau niskiego kowymiaru. Główną motywacją tych badań jest dostarczanie naturalnych przykładów, na których można testować hipoteze symetrii lustrzanej. Przypomnijmy, że wszystkie znane przykłady, dla których ta hipoteza może zostać sformułowana i częściowo udowodniona są izomorficzne z pełnymi przecięciami w przestrzeniach torycznych. W tej części rozprawy przedstawiamy rodziny, których elementy nie są pełnymi przecięciami w rozmaitościach torycznych i dla których nie są znane konstrukcje luster.

Drugą motywacją do badania projektywnych modeli rozmaitości Calabi–Yau są, jak w przypadku rozmaitości hiper-kählerowskich, problemy dotyczące ich klasyfikacji. W przeciwieństwie do rozmaitości hiper-kählerowskich, których znamy tylko kilka rodzin w każdym wymiarze, w przypadku rozmaitości Calabi–Yau wymiaru 3 znanych jest około 10000 rodzin, jednak prawie wszystkie są izomorficzne z pełnym przecięciem w torycznej rozmaitości. Otwarty pozostaje problem czy jest skończenie wiele rodzin rozmaitości Calabi–Yau danego wymiaru.

Moje badania na temat konstrukcji explicite rozmaitości Calabi–Yau zostały zapoczątkowane w pracy doktorskiej, której wyniki zostały opublikowane w [51, 53]. W oparciu o [21, 40] rozwinęliśmy nową metodę konstrukcji rozmaitości Calabi–Yau. Metoda ta składa się z dwóch etapów:

(1) konstrukcji nodalnej rozmaitości Calabi–Yau zawierającej daną powierzchnię del Pezzo
(2) wygładzenia obrazu odpowiedniego ściągnięcia tej powierzchni del Pezzo.

Otrzymujemy w ten sposób wiele nowych rodzin rozmaitości Calabi–Yau. Niestety przykłady te nie miały bezpośredniego opisu geometrycznego pnieważ ich istnienie wynikało z abstrakcyjnych wyników z teorii deformacji.

Badania nad rozmaitościami Calabi–Yau były prowadzone we współpracy z M. Kapustką. Jednym z osiągnięć [K9] jest bezpośrednia metoda opisu powyższych przykładów za pomocą konstrukcji przez bilinkowanie (albo "biliaison"). Przedstawiamy również konstrukcje explicite nowych rodzin rozmaitości Calabi–Yau. Konstrukcje te [52, K9, K11, K12, K13, K7, 54, 55] używają rozmaitych technik takich jak rezolwenty pfaffianowe, specjalne rzutowania, konstrukcje przez bilinkowanie. Otrzymane rodziny rozszerzają znane listy przykładów takich rozmaitości przedstawionych między innymi w [3, 45, 33, K2, 54, 55, 21, 14, 11, 82, 22]. Ponadto rozważane przykłady mają naturalne algebraiczne opisy i nie są na ogół izomorficzne z pełnymi przecięciami w rozmaitościach torycznych. Stanowią dlatego podstawowe przykłady do badania hipotez z symetrii lustrzanej.

5.1. **Konstrukcje rozmaitości Calabi–Yau.**

Artykuły omówione w tej sekcji: [K12, 51, 53]

W [K12] uogólniamy i uzupełniamy wyniki otrzymane w doktoracie. Obserwujemy, że stosując konstrukcję przedstawioną w [51, 53] dla zrzutowanych powierzchni del Pezzo w $\mathbb{P}^5$, otrzymujemy trójwymiarowe rozmaitości Calabi–Yau zanurzone w $\mathbb{P}^6$.

Badamy ideały powierzchni del Pezzo odwzorowane przez niepełny system liniowy pokazując, że ich obrazy mogą być zanurzone w nodalną rozmaitość Calabi–Yau X'. Po odpowiednim rozwiązaniu osobliwości X' otrzymujemy rozmaitość X zawierająca powierzchnię del Pezzo, która może być ściągnięta do punktu. Dostajemy w ten sposób rozmaitość $\mathscr{Y}_0$, dla której istnieje wygładzenie $\mathscr{Y}_t$ przez rozmaitości Calabi–Yau posiadające naturalny dywizor H. Otrzymujemy następującą listę rozmaitości Calabi–Yau o grupie Picarda rzędu 1.

TABELA 2.

No	$degD$	X'	$singX'$	$\chi(\mathscr{Y}_t)$	H^3	$h^0(H)$
1	6	$X'_{2,4}$	42 ODP	-96	14	7
2	6	$X'_{2,4}$	42 ODP	-98	14	7
3	6	$X'_{3,3}$	36 ODP	-76	15	7
4	6	$X'_{3,3}$	36 ODP	-78	15	7
5	7	$X'_{3,3}$	44 ODP	-60	16	7
6	8	$X'_{3,3}$	52 ODP	-44	17	7
7	7	$X'_{2,2,3}$	37 ODP	-74	19	8
8	8	$X'_{2,2,3}$	44ODP	-60	20	8
9	8	$X'_{2,2,2,2}$	42 ODP	-50	24	9

Zauważamy, że dla rozważanych rodzin rozmaitości Calabi–Yau nie ma nawet hipotetycznych równań Picarda-Fuchsa, opisanych w [31], które mogłyby być przypisane do tych rozmaitości. Przykłady $7, 8, 9$ są nowymi rodzinami rozmaitości Calabi–Yau. Każdy z pozostałych przykładów jest naturalnie zanurzony w $\mathbb{P}^6$. Rozmaitości Calabi–Yau kowymiaru 3 w $\mathbb{P}^6$ były wcześniej badane przez Tonoliego w jego rozprawie doktorskiej. Zastosował on twierdzenia strukturalne, dokładniej rezolwenty pfaffianowe, dla podkanonicznych podrozmaitości kowymiaru 3 ([78, 96]) w celu skonstruowania nowych rodzin rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$. Odkrył w ten sposób rodziny rozmaitości mające takie same liczby Hodge'a jak rodziny o numerach $2, 4, 5, 7$ z Tabeli 2.

Naturalnym stało się badanie związków między naszą konstrukcją a konstrukcją Tonoliego. W pracach [K9, 52, K11, K13] przedstawiamy między innym wyniki dotyczące tych badań.

5.2. **Wyznacznikowe rozmaitości Calabi–Yau.**

Artykuł omówiony w tej sekcji: [K13]

Dokonamy teraz przegląd naszych wyników dotyczących wyznacznikowych rozmaitości Calabi–Yau. Punktem wyjścia tych badań była analogia zaobserwowana przez Gross'a i Popescu w [41]. Jest to analogia między opisami wyznacznikowych rozmaitości Calabi–Yau oraz powierzchni del Pezzo.

i	powierzchnie del Pezzo D'	rozmaitości Calabi–Yau X'
1	$D_6 \subset \mathbb{P}(1,1,2,3)$	
2	$D_4 \subset \mathbb{P}(1,1,1,2)$	$X_8 \subset \mathbb{P}(1,1,1,1,4)$
3	$D_3 \subset \mathbb{P}^3$	$X_5 \subset \mathbb{P}^4$
4	$D_{2,2} \subset \mathbb{P}^4$	$X_{3,3} \subset \mathbb{P}^5$
5	4×4 Pfaffiany skośnej macierzy 5×5	6×6 Pfaffiany skośnej macierzy 7×7
6	2×2 minory macierz 3×3	3×3 minory macierzy 4×4
7	2×2 minory macierzy 3×4 otrzymanych przez skreślenie wiersza z symetrycznej macierzy	3×3 minory macierzy otrzymanych przez skreślenie wiersza z symetrycznej macierzy 4×5
8	2×2 minory symetrycznej macierzy 4×4	3×3 minory symetrycznej macierzy 5×5
8'	2×2 minory podwójnie symetrycznej macierzy 3×5	3×3 minory podwójnie symetrycznej macierzy 4×6

TABELA 3. Analogia

Indeks i w powyższej tabeli oznacza stopień odpowiadającej powierzchni del Pezzo. Skoro są dwie powierzchnie del Pezzo stopnia 8, używamy dla jednej z nich $8'$. W naszej pracy przedstawiamy geometryczne wytłumaczenie tej analogii. Pokazujemy, że powierzchnia del Pezzo stopnia i może być w naturalny sposób zanurzona w osobliwą rozmaitość Calabi–Yau X' odpowiadającą powierzchni del Pezzo stopnia $i-1$. Możemy następnie wykonać operację nieprojekcji, czyli operację odwrotną do projekcji. Otrzymujemy w ten sposób rozmaitość Calabi–Yau odpowiadającą w tabeli powierzchni del Pezzo stopnia i. W ten sposób, używając wyników Namikawy oraz wyników Pragacza w appendiksie [K13], możemy obliczyć liczby Hodge'a powyższych rozmaitości wyznacznikowych otrzymując:

i	$h^{1,1}$	$h^{1,2}$
6	2	34
7	2	25
8	1	26

Badamy następnie ekstremalne kontrakcje rozważanych rozmaitości wyznacznikowych dla przykładów o grupie Picarda 2. W przypadku X_6 każda z ekstremalnych kontrakcji jest małą kontrakcją do 56 nodów na przecięciu kwartyki i kwadryki. W przypadku X_7 mamy małą kontrakcję do 63 nodów i dywizorialną kontrakcję do rozmaitości, która jest degeneracją X_8.

Badania wyznacznikowych rozmaitości Calabi–Yau były kontynuowane w pracy [49], w której autorzy przedstawiają metodę obliczania niezmienników Gromowa-Wittena takich rozmaitości. Mamy nadzieję, że rozwój tych technik doprowadzi do konstrukcji symetrycznych luster do wyznacznikowych rozmaitości Calabi–Yau.

5.3. **Powierzchnie del Pezzo w $\mathbb{P}^5$ i rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$.**

Artykuł omówiony w tej sekcji: [52]

W pracy [52] analizujemy dokładniej związek zaobserwowany w Tabeli 2 między powierzchniami del Pezzo w $\mathbb{P}^5$ a rozmaitościami Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$.

Przypomnijmy najpierw konstrukcję Tonoliego rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$. W kowymiarze 3 rozmaitość Calabi–Yau, jako rozmaitość subkanoniczna, jest zdefiniowana przez Pfaffiany tzn. jest miejscem degeneracji skośnego morfizmu między wiązkami o nieparzystej randze $E^*(-t) \xrightarrow{\varphi} E$, gdzie $t \in \mathbb{Z}$. W tym przypadku, X jest zdefiniowane lokalnie przez znikanie $2u \times 2u$ Pfaffianów skośnie symetrycznego odwzorowania między wiązką E rangi $2u+1$ a jej skręconą dualną $E^*(-t)$. W szczególności, jeżeli X jest opisany przez Pfaffian, to

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-2s-t) \to E^*(-s-t) \xrightarrow{\varphi} E(-s) \to \mathcal{I}_X \to 0, \tag{3}$$

gdzie $s = c_1(E) + ut$. Ponadto, z [78, §3] mamy w tym przypadku

$$\omega_X = \mathcal{O}_X(t + 2s - n - 1). \tag{4}$$

Skoro wybór skośnego odwzorowania φ jest równoznaczny z wyborem cięcia $\sigma \in H^0(\bigwedge^2 E(t))$, będziemy używać notacji $\mathrm{Pf}(\sigma)$ dla rozmaitości zdefiniowanej przez odwzorowanie σ.

Tonoli badał wiązki E, które dają, przez konstrukcję pfaffianową, rozmaitość Calabi–Yau stopnia d otrzymując następujące wiązki:

d	E
12	$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6} \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$
13	$4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$
14	$7\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}$ or $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$
15	$\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}$
16	$\ker(\psi)$, gdzie $\psi\colon 13\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6} \to 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$ jest ogólnym odwzorowaniem
17	$\ker(\psi)$, gdzie $\psi\colon 16\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6} \to 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$ jest jednym z trzech odwzorowań opisanych wcześniej

Naszym głównym wynikiem jest pokazanie, że powyższe wiązki są ściśle związane z wiązkami odpowiadającymi zrzutowanym powierzchniom del Pezzo w $\mathbb{P}^5$.

Twierdzenie 19. *Niech $X \subset \mathbb{P}^6$ będzie ogólnym elementem rodziny rozmaitości Calabi–Yau skonstruowanych przez Tonoliego ([88]) oraz niech E_d będzie odpowiadającą mu wiazką. Wtedy istnieje odwzorowanie $E_d \to 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}$ takie, że jądro F zawężone do dowolnego hiperpłaskiego cięcia $\mathbb{P}^5$ definiuje powierzchnię del Pezzo stopnia $\deg(X) - 9$. Ponadto jeżeli ogólna powierzchnia del Pezzo $D \subset \mathbb{P}^5$ jest stowarzyszona z wiązką E_D, to istnieje rozszerzenie E'_D wiązki E_D do $\mathbb{P}^6$, takie, że ogólna wiązka $F \in \mathrm{Ext}^1(E'_D, 2\mathcal{O})$ definiuje trójwymiarową rozmaitość Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ o stopniu $\deg(D) + 9$.*

W szczególności znajdujemy naturalny opis rozmaitości Calabi–Yau rozważanych w [88], który może zostać zaprogramowany w Macaulay 2, aby skonstruować równania tych przykładów w charakterystyce 0. Wnioskujemy również, że jeden z rozważanych przykładów ma grupę Picarda rzędu ≥ 2 (wbrew temu co zostało pokazane w [88]).

Powyższe twierdzenie 19 daje przesłanki do sformułowania następującej hipotezy:

Hipoteza 3. *Jeżeli X jest rozmaitością Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$, to stopień $d_X \leq 18$.*

5.4. **Konstrukcja przez bilinkowanie w kowymiarze 3.**

Artykuł omówiony w tej sekcji: [K9]

Głównym celem [K9] jest badanie jak rezolwenta pfaffianowa zmienia się po operacji bilinkowania. W konsekwencji odkrywamy, że konstrukcja przez bilinkowanie pozwala nam na bezpośredni opis rozmaitości otrzymanych przez nieprojekcje. Ta obserwacja została użyta w [K7] do opisu explicite rodzin odkrytych w [51, 53].

5.4.1. *Bilinkowanie.* Przedstawmy konstrukcję rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^n$ za pomocą bilinkowania i deformacji.

Oznaczamy $F \rightrightarrows X'$ gdy F i X' są ze sobą bilinkowane tzn. istnieje pełne przecięcie takie, że F i F' są składowymi tego przecięcia oraz inne pełne przecięcie takie, że F' i X' są składowymi. $X' \rightsquigarrow X$ oznacza, że X' jest degeneracją X tzn. istnieje płaska rodzina nad dyskiem taka, że X' jest specjalnym elementem a X ogólnym. Mówimy wtedy, że X jest skonstruowany z F za pomocą konstrukcji bilinkowania i piszemy:

$$\mathbb{P}^n \supset F \rightrightarrows X' \rightsquigarrow X \subset \mathbb{P}^n.$$

Otrzymujemy następującą propozycję:

Propozycja 20. *Ogólna powierzchnia kanoniczna $S \subset \mathbb{P}^5$ stopnia $d_S \leq 17$ spełniająca warunek maksymalności modułu Hartshorne-Rao może być otrzymana z powierzchni del Pezzo D stopnia $d_D = d_S - 9$ za pomocą konstrukcji bilinkowania.*

W przypadku rozmaitości Calabi–Yau zaczynamy konstrukcję od trójwymiarowej rozmaitości del Pezzo w $\mathbb{P}^6$ otrzymanej przez zrzutowanie półkanonicznego modelu.

Propozycja 21. *Dla $d \leq 7$ każda gładka trójwymiarowa rozmaitość del Pezzo T_d stopnia d w $\mathbb{P}^6$ jest połączona przez konstrukcję przez bilinkowanie z rozmaitością Calabi–Yau stopnia $d + 9$ w $\mathbb{P}^6$.*

Dla $d = 8$ sytuacja jest bardziej skomplikowana.

Propozycja 22. *Niech T_9 będzie rozmaitością del Pezzo wymiaru 3 w $\mathbb{P}^6$. Wtedy możemy wybrać środek rzutu tak aby obraz $T_9 \subset \mathbb{P}^6$ mógł być połączony przez konstrukcję bilinkowania z osobliwą rozmaitością Calabi–Yau X' stopnia 17. Istnieje wygładzenie tej rozmaitości będące rozmaitością Tonoliego.*

5.4.2. *Konstrukcja kanonicznie zanurzonej powierzchni generalnego typu stopnia* 18. Głównym osiągnięciem omawianej metody była konstrukcja powierzchni generalnego typu z

$$p_g = H^0(S, K_S) = 6$$

z K_S bardzo szerokim o stopniu $K_S^2 = 18$. Próby podejścia do tego problemu konstrukcji takiej powierzchni zostały wcześniej opisane w [15, 88].

Zanurzamy powierzchnię del Pezzo stopnia dziewięć w $\mathbb{P}^5$ przez podsystem systemu antykanonicznego. Konstrukcja bilinkowania jest wykonywana w pełnym przecięciu dwóch hiperpowierzchni stopnia trzy. Taki rzut nie zawiera wystarczająco kubik w swoim ideale. Rozważamy więc specjalne rzutowania.

Propozycja 23. *Niech $D_9 \subset \mathbb{P}^9$ będzie powierzchnią del Pezzo stopnia 9. Wtedy możemy wybrać specjalną trójwymiarową przestrzeń $\Lambda \subset \mathbb{P}^9$ definiującą rzutowanie $\pi_\Lambda : \mathbb{P}^9 \to \mathbb{P}^5$, które spełnia następujące warunki.*

(1) zawężone rzutowanie $\pi_\Lambda|_{D_9}$ jest izomorfizmem na obraz;
(2) powierzchnia $D_9^\Lambda = \pi_\Lambda(D_9)$ jest zawarta w pełnym przecięciu Y_Λ dwóch hiperpowierzchni stopnia 3
(3) Y_Λ ma 60 izolowanych osobliwości.

Jeżeli wybierzemy ogólne Λ, jak powyżej, możemy zastosować konstrukcję przez bilinkowanie w Y_Λ otrzymując następujące twierdzenie:

Twierdzenie 24. *Powierzchnia D_9^Λ jest zbilinkowana na Y_Λ do gładkiej powierzchni kanonicznie zanurzonej w S_0 stopnia 18.*

To pokazuje, że przestrzeń moduli powierzchni ogólnego typu z $p_g = 6$ stopnia kanonicznego 18 jest niepusta i ogólna taka powierzchnia ma bardzo szeroki dywizor kanoniczny. Otrzymana rodzina ma wymiar 36, nie jest jednak pełną rodziną.

We wspólnym projekcie z J. Jelisiejewem i M. Kapustką opisujemy geometrycznie przestrzenie liniowe Λ definiujące specjalne rzutowania używając przekształcenia Cremona. Powiązujemy również powyższą konstrukcję z konstrukcją opisaną w [13] zerowymiarowych schematów wygładzalnych mocy 8.

5.5. **Rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$.**

Artykuł omówiony w tej sekcji: [K11]

Jest to pierwsza praca dotycząca klasyfikacji rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$. Przypomnijmy, że rozmaitości Calabi–Yau zanurzone w $\mathbb{P}^5$ są pełnymi przecięciami dwóch hiperpowierzchni stopnia 3 albo jednej stopnia 4 a drugiej 2 albo są hiperpowierzchnią stopnia 5 w $\mathbb{P}^4$. W [K9, 52, K11, K12] badamy trójwymiarowe rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$ uzyskując pełną klasyfikację przykładów stopnia $d \leq 14$. Wiadomo, że stopień takich rozmaitości w $\mathbb{P}^6$ jest ≤ 41 ale najwyższy stopień znanego przykładu to 17 ([52]). Naturalnym problemem jest znalezienie odpowiedzi na pytanie jaki jest najwyższy stopień rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$. Przypomnijmy, że każda rozmaitość trójwymiarowa może zostać zanurzona w $\mathbb{P}^7$, w szczególności każda rozmaitość Calabi–Yau może zostać zanurzona w $\mathbb{P}^7$. Nie ma znanych konstrukcji symetrycznych luster dla rozmaitości Calabi–Yau stopnia ≥ 15 w $\mathbb{P}^6$.

Najbardziej wpływową hipotezą dotyczącą geometrii niskiego kowymiaru jest wciąż otwarta hipoteza Hartshorne'a [42].

Hipoteza 4. *Jeżeli $X \subset \mathbb{P}^N$ jest rozmaitością wymiaru n taką, że $n \geq \frac{2}{3}N$, to X jest pełnym przecięciem.*

Inną hipotezę zaproponował Schneider'a, który rozważał rozmaitości nie ogólnego typu niskiego kowymiaru.

Hipoteza 5. *Jeżeli $n \geq \frac{1}{2}N$, to istnieje skończenie wiele gładkich n-wymiarowych podrozmaitości $\mathbb{P}^N$, które nie są ogólnego typu.*

Przypadek najniższego stopnia, dla których powyższe hipotezy nie są rozstrzygnięte, jest przypadek rozmaitości kowymiaru 3 w $\mathbb{P}^6$. Klasyfikacja takich rozmaitości została przeprowadzona do stopnia 12. Przypomnijmy, że z punktu widzenia klasyfikacji rozmaitości nie ogólnego typu ważną klasą przykładów są rozmaitości Calabi–Yau, co daje motywację do dalszych badań.

Głównym technicznym wynikiem [K11] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 25. *Stopień trójwymiarowej rozmaitości Calabi-Yau $X \subset Q \subset \mathbb{P}^6$, gdzie Q jest kwadryką, wynosi* 12 *lub* 13 *lub* 14.

Na podstawie tego twierdzenia wnioskujemy, że nie ma rozmaitości Calabi–Yau stopnia 11 w $\mathbb{P}^6$. Badamy również rangi kwadryk, które mogą zawierać rozmaitości Calabi–Yau wymiaru 3.

Propozycja 26. *Jeżeli Q jest kwadryką zawierającą gładką rozmaitość Calabi–Yau w $\mathbb{P}^6$, to* $\mathrm{rk}(Q) \geq 5$. *Ponadto, gładka kwadryka (tzn. rangi 7) nie może zawierać trójwymiarowych rozmaitości Calabi–Yau stopnia* 13.

Podajemy pełną klasyfikację rozmaitości Calabi–Yau zawartych w kwadryce.

Twierdzenie 27. *Niech $X \subset \mathbb{P}^6$ będzie rozmaitością Calabi–Yau zawartą w kwadryce Q. Wtedy X jest: albo pełnym przecięciem dwóch kwadryk i kubiki, albo jest otrzymane przez konstrukcję pfaffianową zastosowaną do wiązki $\bigwedge^2 E(1)$ gdzie E jest izomorficzne z $4\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$, albo wiązką $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$.*

Badamy następnie geometrię rozmaitości Calabi–Yau stopnia 14 w kwadryce i otrzymujemy, że ogólna taka rozmaitość może zostać skonstruowana jako miejsce zerowe skręconej wiązki Cayleya na gładkiej kwadryce.

5.5.1. *Klasyfikacja w stopniach $\leq$ 14.* Po dalszej analizie otrzymujemy klasyfikację rozmaitości Calabi–Yau stopnia 12 i 13 w $\mathbb{P}^6$.

Wniosek 28. *Każda rozmaitość Calabi–Yau wymiaru 3 stopnia 12 w $\mathbb{P}^6$ jest pełnym przecięciem dwóch kwadryk i kubiki. Każda rozmaitość Calabi–Yau wymiaru 3 stopnia 12 w $\mathbb{P}^6$ jest zadana przez znikanie 4×4 Pfaffianów skośnej macierzy 5×5 z liniowymi wyrazami poza rzędem kwadryk.*

Podajemy następnie pełną klasyfikację trójwymiarowych rozmaitości Calabi–Yau w zależności od wiązki, która je zadaje.

Twierdzenie 29. *Niech $X \subset \mathbb{P}^6$ będzie rozmaitością Calabi–Yau wymiaru 3 stopnia 14 w $\mathbb{P}^6$. Wtedy X może zostać skonstruowana przez konstrukcję pfaffianową zastosowaną do $\bigwedge^2 E(1)$, gdzie E jest izomorficzne z $7\mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}$ albo $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$.*

5.5.2. *Klasyfikacja z dokładnością do deformacji.* Pokazujemy, że każdy przykład rozmaitości Calabi–Yau stopnia 14 skonstruowany w [9] za pomocą wiązki $\Omega^1_{\mathbb{P}^6}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^6}(1)$ jest gładką degeneracją rozmaitości Calabi–Yau stopnia 14 skonstruowanej przez Tonoliego. Pokazuje to, że najniższy stopień generatora ideału nie jest stały w płaskiej rodzinie rozmaitości kowymiaru 3.

Wniosek 30. *Jest jedna rodzina rozmaitości Calabi–Yau stopnia 14 w $\mathbb{P}^6$.*

Dalsze wyniki na temat rozmaitości Calabi–Yau stopnia 14 w $\mathbb{P}^6$ zostały przedstawione w pracy [45]. Autorzy przedstawiają przykłady par rozmaitości Calabi–Yau które nie są biwymierne ale ich różnica w pierścieniu Grothendiecka jest anihilowana przez afiniczną prostą.

5.6. Rozmaitości Calabi–Yau w $\mathbb{P}^7$.

Artykuł omówiony w tej sekcji: [K7]

Każda rozmaitość Calabi–Yau może zostać zanurzona w $\mathbb{P}^7$. W pracy [K7] badamy przykłady takich rozmaitości które nie są liniowymi rzutami rozmaitości z wyżej wymiarowej przestrzeni rzutowej.

Przedstawiamy listę (hipotetycznie zupełną) trójwymiarowych rozmaitości Calabi–Yau, które są arytmetycznie Gorensteina w $\mathbb{P}^7$. Oznaczamy przez $\mathrm{Pf}_{13} \subset \mathbb{P}^7$ rozmaitość kowymiaru 3 zadaną przez skośną macierz 4×4 form liniowych z dodatkowym rzędem i kolumną kwadryk. Przez F_1 rozumiemy trójwymiarową rozmaitość del Pezzo $(1,1) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$, a przez F_2 trójwymiarową rozmaitość del Pezzo $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Przykłady 2, 4, 5 oraz 11 były badane w [9], przykłady 4, 7 oraz 8 w [51] oraz 1 w [56]. Przykłady 6, 9 i 10 są nowymi rodzinami trójwymiarowych rozmaitości Calabi–Yau. Badamy geometrię tych przykładów opisując ich biwymierne kontrakcje i stożki Kähler'a. W celu analizy przykładu stopnia 19 używamy odwzorowania Cremony zdefiniowanego przez kwadryki zawierające zanurzenie Segre $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ w $\mathbb{P}^8$. Możemy pokazać, że powyższa tabela przedstawia pełną listę arytmetycznie Gorensteina rozmaitości Calabi–Yau o stopniu $\leq$ 17. Pojawia się naturalny problem.

No.	Deg.	$h^{1,1}$	$h^{1,2}$	Opis
1	14	2	86	$(2,4)$ dywizor w $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$
2	15	1	76	$G(2,5) \cap X_3 \cap \mathbb{P}^7$
3	16	1	65	$X_{2,2,2,2}$
4	17	1	55	bilinkowany na $Y_{2,2,2}$ do $\mathbb{P}^3$
5	17	2	58	2×2 minory macierzy 3×3 o stopniach wyrazów $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)$
6	17	2	54	kowymiar 2 w skrolu kubicznym
7	18	1	46	bilinkowany na $Y_{2,2,3} \subset \mathbb{P}^7$ do F_1
8	18	1	45	bilinkowany na $Y_{2,2,3} \subset \mathbb{P}^7$ do F_2
9	19	2	37	bilinkowany na specialnym Pf_{13} do F_1
10	19	2	36	bilinkowany na specialnym Pf_{13} do F_2
11	20	2	34	3×3 minory macierzy 4×4 form liniowych w $\mathbb{P}^7$

TABELA 4. Rozmaitości Calabi–Yau arytmetycznie Gorenstein'a w $\mathbb{P}^7$

Problem 31. *Czy Tabela 4 przedstawia pełną listę arytmetycznie Gorensteina rozmaitości Calabi-Yau w $\mathbb{P}^7$?*

5.7. Rozmaitości Calabi–Yau jako produkty włókniste.

Artykuł omówiony w tej sekcji: [K14]

Badamy konstrukcje rozmaitości Calabi–Yau, które są małymi rozwiązaniami nodalnych produktów włóknistych relatywnie minimalnych wymiernych powierzchni eliptycznych z sekcją. Takie konstrukcje były analizowane przez Schoen'a, a naszym celem jest ich uogólnienie przez dopuszczenie dowolnych konfiguracji włókien, na powierzchniach eliptycznych. Otrzymujemy w ten sposób bardziej skomplikowane typy punktów podwójnych. Zaczynamy od klasyfikacji włókien, które mogą się pojawić na takich rozmaitościach. Wtedy znajdujemy wzory pozwalające obliczyć liczby Hodge'a otrzymanych rozmaitości Calabi–Yau. Następnie opisujemy deformacje rozważanych rozmaitości otrzymując:

Twierdzenie 32. *Niech X będzie rozmaitością Calabi–Yau, która jest rozwiązaniem osobliwości produktu włóknistego dwóch wymiernych powierzchni eliptycznych z sekcjami. Wtedy generyczna deformacja takich rozmaitości też jest produktem włóknistym tego typu.*

5.8. Rozmaitości Fano.

Artykuły omówione w tej sekcji: [K8, K15]

Przypomnijmy, że rozmaitości Fano są algebraicznymi rozmaitościami, dla których anty-kanoniczny dywizor jest szeroki. Zauważmy, że hiperpłaskie cięcie rozmaitości Fano w antykanonicznym zanurzeniu jest rozmaitością o trywialnej pierwszej klasie Cherna. W ten sposób geometria rozmaitości Fano jest ściśle powiązana z geometrią rozmaitości hiper-kählerowskich i rozmaitości Calabi–Yau.

Rozmaitości Fano wymiaru dwa nazywamy powierzchniami del Pezzo. Klasyfikacja trójwymiarowych rodzin została skompletowana w pracach [46, 64]. W przypadku osobliwych rozmaitości problem klasyfikacji jest o wiele trudniejszy nawet w przypadku osobliwych powierzchni del Pezzo [1, 2, K15, 12, 97]. Dla trójwymiarowych rozmaitości Fano zainteresowani jesteśmy problemem konstrukcji rozmaitości o danej grupie automorfizmów lub rozstrzygnięciem, które przykłady dopuszczają metrykę Kählera-Einsteina. Ostatni problem był rozważany w [K8] w przypadku rozmaitości Fano genusu 12.

5.8.1. *Powierzchnie log del Pezzo.* Głównym wynikiem pracy [K15] jest opis projektywnych modeli powierzchni log del Pezzo indeksu 2, tzn. powierzchni dla których $-2K_Z$ jest szerokim dywizorem Cartier.

Twierdzenie 33. *Jeżeli Z jest powierzchnią log del Pezzo indeksu 2, to zachodzi jeden z następujących przypadków:*

a) $K_Z^2 = 1$ *oraz Z jest izomorficzny z hiperpowierzchnią stopnia 6 w* $\mathbb{P}(1,1,2,3)$

b) $K_Z^2 = 2$ *oraz Z jest albo izomorficzny z hiperpowierzchnią stopnia 8 w* $\mathbb{P}(1,1,4,4)$ *albo hiperpowierzchnią stopnia 4 w* $\mathbb{P}(1,1,1,2)$

c) $K_Z^2 = 3$ *oraz Z jest izomorficzny z pełnym przecięciem w* $\mathbb{P}(1,1,1,1,2)$ *dwóch hiperpowierzchni stopni 2 i 3*

d) $K_Z^2 \geq 4$ *oraz Z może być zanurzony w* $\mathbb{P}(1^{K_Z^2+1}, 2)$ *tak, że ideał obrazu jest generowany przez hiperpowierzchnie stopni 2 oraz 3. Ponadto Z jest wtedy jednej z następujących postaci:*

  (i) izomorficzny ze stożkiem nad wymierną krzywą stopnia 4 *w* $\mathbb{P}^4$

  (ii) zawarty w trójwymiarowej rozmaitości izomorficznej ze stożkiem nad "skrollem" lub nad płaszczyzną.

Główną ideą dowodu jest badanie zanurzeń powierzchni K3 stowarzyszonych dzięki pracy Alekseev'a i Nikulina ([1, 2]) z rozważanymi powierzchniami log del Pezzo.

5.8.2. *Rozmaitości Fano genusu* 12. W pracy [K8] badamy geometryczne własności rozmaitości Mukai, tzn. rozmaitości Fano V_{12} wymiaru trzy o grupie Picarda rangi 1 i anty-kanonicznym stopniu 22. Motywacją do badania tych rozmaitości jest problem istnienia metryk Kählera-Einsteina (KE). W [18, 19, 20, 89] autorzy zaobserwowali, że generyczna rozmaitość Mukai nie dopuszcza metryki KE, jednak są przykłady, które dopuszczają. Prokhorov pokazał, że przestrzeń moduli rozmaitości Mukai dopuszcza stratyfikację w zależności od grupy automorfizmów. W szczególności, składnik identyczności G grupy automorfizmów rozmaitości V_{12} jest singletonem poza następującymi przykładami:

1) $X = V_{MU}$ przykład Mukai-Umemura, dla którego $G = PSL(2)$
2) X jest elementem jedno-parametrowej rodziny V^m, wtedy $G = \mathbb{C}^*$
3) $X = V^a$, wtedy $G = \mathbb{C}^+$.

Naszym celem jest badanie problemu istnienia metryk KE dla przykładów V^m. Potrzebujemy w tym celu dokładniej zrozumieć geometrię tych przykładów. Ogólna rozmaitość Fano genusu 12 może być skonstruowana jako rozmaitość $VSP(C,5)$, gdzie $C \subset \mathbb{P}^2$ jest krzywą stopnia 4 ([58]).

Propozycja 34. *Niech V będzie elementem rodziny V^m rozmaitości Mukai dopuszczających nietrywialne działanie $\mathbb{C}^*$. Wtedy stowarzyszona krzywa stopnia* 4 *składa się z dwóch wzajemnie stycznych stożkowych. Jeżeli te stożkowe się pokrywają, to dostajemy przykład Mukai Umemura.*

Skoro suma dwóch stożkowych dopuszcza dodatkowa symetrię osiową wnioskujemy, że ogólny element V^m dopuszcza dodatkową symetrię ι, która nie komutuje z działaniem $\mathbb{C}^*$.

Rozważamy więc $H =< \mathbb{C}^*, \iota >= \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{C}^*$ oraz jej zwartą podgrupę W generowaną przez okrąg oraz ι. Z twierdzenia Bando-Mabuchi otrzymujemy, że jeżeli rozmaitość V^m dopuszcza metrykę KE, to dopuszcza W niezmienniczą metrykę KE. W konsekwencji otrzymujemy:

Twierdzenie 35. *Zbiór elementów V^m, które dopuszczają W niezmienniczą metrykę KE jest otwarty w topologii euklidesowej.*

Znajdujemy następnie, startując od krzywej C stopnia 4, bezpośrednie opisy (algorytm w Macaulay 2) za pomocą równań dla wszystkich rozmaitości Fano $VSP(C,6)$ genusu 12 o grupie Picarda 1. Opisujemy, również dzięki Macaulay 2 schemat Hilberta prostych na danej rozmaitości Fano. To pozwala nam opisać, niezmiennicze na działanie $\mathbb{C}^*$, dywizory na tej rozmaitości. W konsekwencji otrzymujemy następujący wynik.

Propozycja 36. *Dla ogólnego elementu rodziny V^m mamy*

$$lct(V^m, \mathbb{C}^*) \leq \frac{1}{2}.$$

REFERENCJE:

[1] Alekseev, V., Nikulin, V., *Classification of log del Pezzo surfaces of index ≤ 2,* Memoirs of the Mathematical Society of Japan 15, (2006).

[2] Alekseev, V., Nikulin, V., *Classification of del Pezzo surfaces with log-terminal singularities of index $= 2$ and involutions of K3 surfaces,* Soviet Math. Dokl. 39(3), (1989), 507-511.

[3] Batyrev, V., Borisov, A., *On Calabi–Yau complete intersections in toric varieties,* in Higher- dimensional complex varieties (Trento, 1994), de Gruyter, Berlin, (1996), 39-65.

[4] Beauville, A., *Varietes kähleriennes dont la premiere classe de Chern est nulle,* J. of Diff. Geometry 18, (1983), 755-782.

[5] Beauville, A., *Holomorphic symplectic geometry: a problem list,* Complex and Differential Geometry, Springer Proceedings in Mathematics 8, (2011), 49-64.

[6] Beauville, A., et al., *Géométrie des surfaces K3: modules et périodes*, Astérisque. Soc. Math. France 126, Paris, (1985).

[7] Beauville, A., Donagi, R., *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4,* C.R. Acad. Sc. Paris 301, (1985), 703-706.

[8] Bellamy, G., Schedler, T., *A new linear quotient of $\mathbb{C}^4$ admitting a symplectic resolution,* Math. Z. 273, no. 3-4, (2013), 753-769.

[9] Bertin, A., *Examples of Calabi–Yau 3-folds in $\mathbb{P}^7$ with $\rho = 1$*, Canad. J. Math. 61, (2009), 1050-1072.

[10] Bogomolov, F., *The decomposition of Kähler manifolds with a trivial canonical class*, Mat. Sbornik (N.S.) 93(135), (1974), 573-575.

[11] Brown, G., Kasprzyk, A., Zhu, L., *Gorenstein formats, canonical and Calabi–Yau threefolds,* arXiv:1409.4644.

[12] Buczyński, J., Kapustka, G., Kapustka, M., *Special lines on contact manifolds* arXiv:1405.7792, w recenzji.

[13] Cartwright, D., Erman, D., Velasco, M., Viray, B., *Hilbert schemes of 8 points,* Algebra Number Theory, 3(7), (2009), 763-795.

[14] Candelas, P., Constantin, A., Mishra, C., *Calabi–Yau Threefolds With Small Hodge Numbers*, arXiv preprint arXiv:1602.06303.

[15] Catanese, F., *Homological algebra and algebraic surfaces,* In Algebraic geometry Santa Cruz (1995), Proc. Sympos. Pure Math. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1997), 3-56.

[16] Catanese, F., *Canonical surfaces of higher degree*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser (2016).

[17] Catanese, F., Schreyer, F.O., *Canonical projections of irregular algebraic surfaces,* Algebraic Geometry, de Gruyter, Berlin, (2002), 79-116.

[18] Chen, X, Donaldson, S., Sun S., *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities,* J. Amer. Math. Soc. 28(1), (2015), 183-197.

[19] Chen, X., Donaldson, S., Sun S., *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than 2π,* J. Amer. Math. Soc. 28(1), (2015), 199-234.

[20] Chen, X., Donaldson, S., Sun S., *Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof,* J. Amer. Math. Soc. 28(1), (2015), 235-278.

[21] Cynk, S., *Hodge numbers of double octic with non-isolated singularities*, Ann. Pol. Math. LXXIII, (2000), 221-226.

[22] Cynk, S., Szemberg, T., *Double covers and Calabi–Yau varieties*, Banach Center Publications 44(1), (1998), 93-101.

[23] Dolgachev, I., *Corrado Segre and nodal cubic threefolds*, preprint.

[24] Debarre, O., *Annulation de thêtaconstantes sur les variétés abélienne de dimension quatre, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 305, (1987), 885-888.

[25] Debarre, O., Voisin, C., *Hyper-kähler fourfolds and Grassmann geometry*, J. Reine Angew. Math. 649, (2010), 63-87.

[26] Debarre, O., Kuznetsov, A., *Gushel-Mukai varieties: classification and birationalities,* arXiv:1510.05448.

[27] Debarre, O., Kuznetsov, A.,*Gushel-Mukai varieties: linear spaces and periods*, arXiv:1605.05648.

[28] Debarre, O., Kuznetsov, A., *On the cohomology of Gushel-Mukai sixfolds*, arXiv:1606.09384.

[29] Dolgachev, I., Markushevich, D., *Lagrangian tens of planes, Enriques surfaces and holomorphic symplectic fourfolds,* (2010) preprint.

[30] Donten-Bury, M., Wiśniewski, J., *On 81 symplectic resolutions of a 4-dimensional quotient by a group of order 32,* arXiv:1409.4204, (2014).

[31] van Enckevort, C., van Straten, D., *Monodromy calculations of fourth order equations of Calabi–Yau type*, Mirror symmetry. V, AMS/IP Stud. Adv. Math. 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2006), 539-559.

[32] Fujiki, A., *On the de Rham Cohomology Group of a Compact Kähler Symplec- tic Manifold,* Adv. Stud. Pure Math. 10, (1987), 105-165.

[33] Galkin, S., Kuznetsov A., Movshev M., *An explicit construction of Miura's varieties*, preprint.

[34] Galkin, S., Shinder, E., *The Fano variety of lines and rationality problem for a cubic hypersurface,* arXiv:1405.5154.

[35] van Geemen., B., *Some remarks on Brauer groups of K3 surfaces,* Adv. Math., 197(1), (2005), 222-247.

[36] van Geemen, B., Sarti A., *Nikulin involutions on K3 surfaces*, Math. Z. 255, (2007), 731-753.

[37] Guan, D., *On the Betti numbers of irreducible compact hyperkähler manifolds of complex dimension four,* Math. Research Letters 8, (2001), 663-669.

[38] Gritsenko, V., Hulek, K., Sankaran, G.K., *Moduli spaces of K3 surfaces and holomorphic symplectic varieties*, Handbook of Moduli (ed. G. Farkas and I. Morrison), vol. 1, Advanced Lect. in Math., IP, Somerville, MA, (2013), 459-526.

[39] Gritsenko, V., Hulek, K., Sankaran, G.K., *Moduli spaces of irreducible symplectic manifolds,Compos. Math.*146(2), (2010), 404-434.

[40] Gross, M., *Deforming Calabi-Yau threefolds*, Math. Ann. 308(2), (1997), 187-220.

[41] Gross, M., Popescu, S., *Calabi–Yau Threefolds and Moduli of Abelian Surfaces I,* Compositio Mathematica, (2001), 127-169.

[42] Hartshorne, R., *Varieties of small codimension in projective space,* Bull. Amer. Math. Soc. 80, (1974), 1017-1032.

[43] Huybrechts, D., *Lectures on K3 surfaces*, book project.

[44] Huybrechts, D., *The $K3$ category of a cubic fourfold,* 40 p., to appear in Compositio.

[45] Daisuke Inoue, Atsushi Ito, Makoto Miura, *Complete intersection Calabi-Yau manifolds with respect to homogeneous vector bundles on Grassmannians*, arXiv:1607.07821.

[46] Parshin, A.N., Shafarevich, I.R., (eds.) Iskovskih, Prohorov. *Algebraic geometry V. Fano varieties*, Springer 249p.

[47] Iliev, A., Ranestad, K., *K3 surfaces of genus 8 and varieties of sums of powers of cubic fourfolds,* Trans. Amer. Math. Soc. 353(4), (2001), 1455-1468.

[48] Iliev, A., Manivel, L., *Fano manifolds of degree ten and EPW sextics*, Annales scientifiques de l'E.N.S. Sér. 4, 44(3), (2011), 393-426.

[49] Jockers, H., Kumar, V., Lapan, J.M., Morrison, D.R., *Two-sphere partition functions and Gromov-Witten invariants*, in Mathematical Physics, (2014) - Springer.

[50] Kamenova, L., *Survey of finiteness results for hyperkaehler manifolds*, arXiv:1607.03215.

[51] Kapustka, G., *Primitive contractions of Calabi–Yau threefolds II* J. Lond. Math. Soc. (2) 79(1), (2009), 259-271.

[52] Kapustka, G., Kapustka, M., *Tonoli Calabi-Yau threefolds revisited*, arXiv:1310.0774, w recenzji.

[53] Kapustka, G., Kapustka, M., *Primitive contractions of Calabi–Yau threefolds I,* Commun. Algebra 37(2), (2009), 482-502.

[54] Kapustka, M., *Geometric transitions between Calabi–Yau threefolds related to Kustin-Miller unprojections*, J. Geom. Phys., (2011), 1309-1318.

[55] Kapustka, M., *Some degenerations of G_2 and Calabi–Yau varieties,* EMS Ser. Congr. Rep., (2012), " Contributions to algebraic geometry", European Mathematical Society (EMS).

[56] Kühnel, M., *Calabi–Yau-threefolds with Picard number $\rho(X) = 2$ and their Kähler cone II*, Pacific. J. Math. 217(1), (2004), 115-137.

[57] Kuznetsov, A., *Derived categories view on rationality problems*, preprint math.AG/1509.09115.

[58] Kuznetsov, A., Prokhorov, Y., Shramov C., *Hilbert schemes of lines and conics and automorphism groups of Fano threefolds*, preprint math. AG/1605.02010.

[59] Lehn, Ch., Lehn, M., Sorger, Ch., van Straten, D., *Twisted cubics on cubic fourfolds,* J. reine angew. Math., (2015).

[60] Macri, E., Stellari, P., *Fano varieties of cubic fourfolds containing a plane*, Math. Ann. 354, (2012), 1147-1176.

[61] Martin-Deschamps, M., Perrin, D., *Sur la classification des courbes gauches*, Astérisque no.184-185, (1990).

[62] Migliore, J., *Introduction to liaison theory and deficiency modules*, Progr. Math., Birkhäuser-Verlag, (1998).

[63] Mongardi, G., Wandel, M., *Induced automorphisms on irreducible symplectic manifolds*, J. Lond. Math. Soc. (2), 92(1), (2015), 123-143.

[64] Mori, S., Mukai, S., *Classification of Fano 3-folds with* $b_2 \geq 2$, Manuscripta Math. Volume 36(2), (1981), 147-162.

[65] Morin, Ugo *Sui sistemi di piani a due a due incidenti, Atti del Reale Istituto Venetodi Scienze, Lettere ed Arti LXXXIX*, (1930), 907-926.

[66] Mukai, S.,*Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus 10*, Algebraic geometry and commutative algebra Vol. I, Kinokuniya, Tokyo, (1988).

[67] Mukai, S., *Polarized K3 surfaces of genus 18 and 20,* Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989), 264-276, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 179, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1992).

[68] Mukai, S., *Curves and K3 surfaces of genus eleven*, Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994), 189-197, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 179, Dekker, New York, (1996).

[69] Mukai, S., *Polarized K3 surfaces of genus thirteen*, Moduli spaces and arithmetic geometry (Kyoto 2004), 315-326, Adv. Stud. Pure Math. 45, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2006).

[70] Nikulin, V.V., *Finite groups of automorphisms of kählerian surfaces of type K3*, Moscow Math. Soc. 38, (1980), 71-137.

[71] O'Grady, K., *Higher-dimensional analogues of K3 surfaces*, Current developments in algebraic geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. 59, C.U.P. (2012), 257-293.

[72] O'Grady, K., *Desingularized moduli spaces of sheaves on a* $K3$, J. Reine Angew. Math. 512, (1999), 49-117.

[73] O'Grady, K., *Pairwise incident planes and Hyperkähler fourfolds*, A celebration of Algebraic Geometry Clay Mathematics Proceedings 18, (2013), 553-566.

[74] O'Grady, K., *Irreducible symplectic 4-folds numerically equivalent to* $(K3)^{[2]}$, Commun. Contemp. Math.10(4), (2008), 553-608.

[75] O'Grady, K., *Irreducible symplectic 4-folds and Eisenbud-Popescu-Walter sextics*, Duke Math.J. 134(1), (2006), 99-137.

[76] O'Grady, K., *Double covers of EPW-sextics,* Michigan Math. J. 62, (2013), 143-184.

[77] O'Grady, K., *Moduli of double EPW-sextics,* to appear in Memoirs of the AMS.

[78] Okonek, Ch., *Note on subvariety of codimension* 3 *in* $\mathbb{P}^n$, Manuscripta Math. 84, no. 3-4, (1994), 421-442.

[79] Peskine, C., Szpiro, L., *Liaison des varietes algebriques. I,* Invent. Math. 26, (1974), 271-302.

[80] Pragacz, P., Ratajski. J., *Formulas for Lagrangian and orthogonal degeneracy loci; Q-polynomial approach*, Compositio Math. 107(1), (1997), 11-87.

[81] Pragacz, P., *Algebro-geometric applications of Schur S- and Q-polynomials*, In Topics in invariant theory (Paris, 1989/1990), volume 1478 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, (1991), 130-191.

[82] Qureshi, M.I., Szendroi B., *Calabi-Yau threefolds in weighted flag varieties*, arXiv:1105.4282, Adv. High Energy Physics, (2012) 547317, 14.

[83] Rødland, E. A., *The Pfaffian Calabi–Yau, its mirror, and their link to the Grassmannian* $G(2,7)$, Compositio Math. 122(2), (2000), 135-149.

[84] Saint-Donat B., *Projective Models of* $K3$ *Surfaces*, Am. J. Math. 96(4), 602-639.

[85] Sawon, J., *A bound on the second Betti number of hyperkähler manifolds of complex dimension six*, arXiv:1511.09105.

[86] Schreyer, F.-O., Tonoli, F., *Needles in a haystack: special varieties via small fields,* Computations in algebraic geometry with Macaulay 2, Algorithms Comput. Math. 8, Springer, Berlin, (2002), 251-279.

[87] Siu, Y. T., *Every K3 surface is Kähler*, Inventiones Mathematicae, 73(1), (1983), 139-150.

[88] Tonoli, F., *Construction of Calabi-Yau 3-folds in*$\mathbb{P}^6$, J. Algebraic Geom. 13(2), (2004), 209-232.

[89] Tian, G., *On Kähler-Einstein metrics on certain Kähler manifolds with* $c_1(M) > 0$, Invent. Math. 89.

[90] Varley, R., *Weddle's surfaces, Humbert's curves, and a certain 4-dimensional abelian variety, Am. J. Math.* 108, (1986), 931-951.

[91] Verbitsky, M., *A global Torelli theorem for hyperkahler manifolds*, Duke Math. J. Volume 162(15), (2013), 2929-2986.

[92] Verra, A., *The Prym map has degree two on plane sextics*, In The Fano Confer- ence, Univ. Torino, Turin, (2004), 735-759.

[93] Vinberg, E., B.*The two most algebraic K3 surfaces, Math. Ann.*, 265(1), (1983), 1-21.

[94] Voisin, C., *Géométrie des espaces de modules de courbes et de surfaces K3, d'apres Gritsenko-Hulek-Sankaran, Farkas-Popa, Mukai, Verra,* Séminaire Bourbaki 2006/2007, Exposé 981, Société Mathématique de France., Astérisque 317, (2008), 467-490.
[95] Voisin, C., *On the universal* CH_0 *group of cubic hypersurfaces,* arXiv:1407.7261, to appear in JEMS.
[96] Walter, Ch., *Pfaffian subscheme*, J. Algebraic Geom. 5(4), (1996), 671-704.
[97] Wiśniewski, J., *On contractions of extremal rays of Fano manifolds*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 417, (1991), 141-158.

Grzegorz Kapustka