prof. dr hab. Mirosław Baran
Katedra Zastosowań Matematyki
Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Recenzja rozprawy doktorskiej
Nierówności typu A.A. Markowa i W.A. Markowa w normach L^p
napisanej przez mgr Grzegorza Srokę pod opieką dr hab. Leokadii Białas-Cieź.

Autorem recenzowanej dysertacji jest Pan mgr Grzegorz Sroka, autor jednej ale ważnej opublikowanej pracy, która była podstawą do otwarcia przewodu doktorskiego. Opiekunem pracy jest Pani dr hab. Leokadia Białas-Cieź, autorka (lub współautorka) wielu ważnych prac z teorii aproksymacji wielomianowej, jest to ze wszech miar kompetentna specjalistka w dziedzinie, z którą jest związana dysertacja mgr Sroki.

Oceniana praca doktorska liczy 77 stron i zawiera 105 pozycji bibliograficznych (będę na potrzeby recenzji oznaczał je [S1]-[S105]) i jest napisana w języku polskim. Oprócz pewnych błędów w tekście (np. w Twierdzemiu 24 przy oszacowaniu $D(u,v)$ brakuje cynnika n^d) to ocenę redakcji pracy obniża brak skorowidzu i spisu oznaczeń, bo co np. oznacza $||P||_{L^p([-1,1]),\beta}$ można się tylko domyślić z kontekstu. A w dysertacji, zwłaszcza w rozdziale 3, bardzo dużo jest różnorakich oznaczeń, w których czasami trudno się połapać.

Ocenę pracy rozpoczniemy od przypomnienia, jakie warunki powinna spełniać rozprawa doktorska wg. Ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym.

Art. 13.1. Rozprawa doktorska, przygotowywana pod opieką promotora albo pod opieką promotora i promotora pomocniczego, o którym mowa w art. 20 ust. 7., powinna stanowić oryginalne rozwiązanie problemu naukowego lub oryginalne dokonanie artystyczne oraz wykazywać ogólną wiedzę teoretyczną kandydata w danej dyscyplinie naukowej lub artystycznej oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej lub artystycznej.

Przez oryginalne rozwiązanie problemu naukowego w matematyce rozumiemy nowe wyniki lub nowe metody, które powinny mieć istotne znaczenie.

Zaczniemy od ocenienia ogólnej wiedzy kandydata w ważnym dziale teorii aproksymacji, jaką są nierówności wielomianowe, szczególnie ten ich rodzaj znany jako nierówności typu Markowa. Warto zwrócić uwagę, że nierówności typu Markowa, jako jeden z wiodących zagadnień, zaowocowały wieloma doktoratami, w tym tak znanych matematyków jak Elias M. Stein (wg. Math. Sci. Net. 221 opublikowanych prac i książek, które były cytowane 18268 razy), praca doktorska *Linear Operators on L_p Spaces*, obroniona w 1955 roku pod opieką Antoniego Zygmunda, Lawrence F. Shampine (168 publikacji, 1180 cytowań), *Asymptotic L2 Inequalities of Markoff Type*, obrona 1964 pod kierunkiem Johna Todda, a z młodszych matematyków Leokadia Białas-Cieź *Sur l'inegalité de Markov pour les compacts...*, 1999, promotor Pierre Goetgheluck, Rafał Pierzchała *Zastosowania geometrii o-minimalnej w teorii aproksymacji*, 2005, promotor

Wiesław Pawłucki czy Bella Nagy, 2006, uczeń znakomitego Vilmosa Totika (którego nieustającym zainteresowaniem cieszą się nierówności typu Markowa, czym zajmują się również inni jego uczniowie: Benko, Tookos, Simeonov, Varga), a z Węgrów jeszcze Tamas Erdelyi, 1989, uczeń Paula Nevaia, wreszcie w 2007 Beata Milówka obroniła doktorat pod moją opieką.

Bogata bibliografia pracy oraz jej wstęp i rozdział 1 odzwierciedla dobrą orientację i wiedzę kandydata w aproksymacji wielomianowej, łączącej wiele zagadnień w teorii aproksymacji, teorii potencjału, analizie zespolonej i geometrii analitycznej, subanalitycznej i o-minimalnej. Zdaniem recenzenta brakuje jednak odniesień do zastosowań nierówności (W. i A.) Markowa, zarówno teoretycznych jak i numerycznych. Przede wszystkim brakuje w bibliografii pracy Wiesława Pleśniaka [13], który obok Józefa Siciaka mistrzowsko rozwinął teorię aproksymacji wielomianowej w Krakowie. Pytania postawione na końcu tej pracy od ponad ćwierć wieku stanowią motywację dla wielu badań. Warte zamieszczenia byłyby również przeglądowe prace profesora Pleśniaka [14, 15, 16], gdzie znajduje się m.in. cenna bibliografia, a także prace [17, 18], gdzie podane są zastosowania mierówności Markowa do nierówności Jacksona i ważnego problemu zbiorów normujących (znanych także jako sieci dopuszczalne). W pracach profesora Siciaka też mgr Sroka niezbyt się orientuje, a np. praca [21] jest ściśle związana z nierównosciami Markowa, w szczególności w tej znanej publikacji niewiele zabrakło do odkrycia uogólnienia nierówności Władimira Markowa w takiej werji jak zostało to zrobione 30 lat później [S11]. Nie mam zbytnich pretensji, że kandydat nie spotkał się z pracami Dörflera [5, 6, 7, 8] oraz jeszcze ważniejszych prac Böttchera i Dörflera [2, 3], które dotyczą nierówności Markowa w przestrzeniach L^2 z różnymi wagami. Znany matematyk węgierski A. Kroo też nie zna tych ważnych prac o czym świadczą bibliografie w jego pracach, związanych np. z pracą [5]. Z drugiej strony, gdyby kandydat wpisał w Google hasła *Markov inequality* L_p *norms*, *Markov inequality* L_2 *norms* lub po prostu Markov inequality i przejrzał starannie wyniki, doszedłby do wielu prac, w tym wspomnianych prac Dörflera i Dörflera z Böttcherem (na temat wykorzystywaniu Google do głębszego zorientowania się w danej dziedzinie, przy pisaniu doktoratu, szerzej pisałem w recenzji mgr inż. Krzysztofa Króla, która jest dostepna na stronie Centralnej Komisji d.s. Stopni i Tytułu Naukowego, lekturę zawartych tam uwag polecam doktorantom a zwłaszcza ich opiekunom). Ja sam zainteresowałem się pracami Dörflera zupełnie niedawno, już w trakcie pisania recenzji. Kończąc temat orientacji mgr Sroki w aproksymacji wielomianowej, chciałbym go pochwalić za dotarcie do wielu prac, których sam nie znałem, np. głęboką pracę Mastroianniego i Totika [S75] oraz ważną pracę Mastroianniego [S76]. To tez świadczy o samodzielności badawczej Grzegorza Sroki, moim zdaniem kandydat spełnia wymagania ustawy pod tym względem.

Ocenimy teraz merytoryczną zawartość pracy, najważniejszy wymóg ustawy. Praca, jak wskazuje tytuł oraz wstęp i pierwszy rozdział, uogólnień nierówności dla pochodnych wielomianów jednej zmiennej na odcinku w $\mathbb{R}$ otrzymane dla pierwszej pochodnej przez Andrieja Markowa i dla wyższych pochodnych przez Władimira, młodszego brata Andrieja, naukowych wnuków wielkiego Pafnutija Czebyszewa. Nie będę szerzej pisał na temat znaczenia nierówności typu Andrieja Markowa w normach supremowych (i ich iterowania), doskonale to robi

W. Pleśniak w swoich przeglądowych pracach. Ograniczę się tylko do paru istotnych uwag, które też można wyczytać z dysertacji, dotyczących przypadku norm całkowych. Tutaj postęp jest znacznie wolniejszy, najlepszy ogólny i dokładny (jeśli chodzi o wykładnik) wynik pochodzi od znakomitego Pierra Goetghelucka [S55] i dotyczy przypadku obszarów ograniczonych w $\mathbb{R}^N$ z brzegiem lipshitzowskim, który nie może mieć ostrz zerowych. Gdy obszar ma ostrza zerowe to wiadomo mało albo lepiej napisać, mało dokładnie, nie ma tu jeszcze przełomu, jakim np. byłoby wyznaczenie wykładnika Markowa dla chociażby jednego zbioru z ostrzami. Z tego powodu należy docenić badania mgr Sroki związane ze zbiorami typu asteroida, choć wyniki nie są jeszcze satysfakcjonujące. Oszacowaniami pochodnych wielomianów w normach L^p dla zbiorów z ostrzami pioniersko zajmowali się A. Zeriahi, P. Goetgheluck oraz A. Jonsson [S104,53,64], o czym wspomina G. Sroka oraz M. Baran (który poprawił m.in. wyniki Zeriahiego i Goetghelucka), o czym kandydat nie wspomina, choć miał dostęp do notatek na ten temat (a wystarczyło np. je wspomnieć jako nieopublikowany manuskrypt). Kiedyś wydawało mi się, że zbiory z zerowymi ostrzami wielomianowy posiadają wykładnik Markowa normie L^p większy niż w normie supremowej ale obecnie skłaniam się ku przeciwnemu przypuszczeniu, na co są pewne przesłanki, o których nie będę przy tutaj pisał.

Niestety rozdział 5 pracy to zdecydowanie jej najsłabszy fragment, przynajmniej w wersji zamieszczonej w dysertacji. W tym miejscu chciałbym wspomnieć o pewnej nonszalancji cechującej autora dysertacji: podaje pewne fakty, nie sprawdziwszy ich dokładniej, co zwykle wymaga doprecyzowania pewnych założeń, np. na str. 55 aby funkcja d była rzeczywiście metryką musimy założyć $l \geq 2$ (innym przykładem na stronie 65 jet Twierdzenie 39, w którym należy wyjaśnić jakie są warunki normujące wielomiany Jacobiego). G. Sroka rozpatruje rodzinę zbiorów E_l, $l \geq 3$ nieparzyste, które można dla $l \leq 5$ nazwać asteroidami (dla $l = 3$ jest to dobrze znana asteroida), a na pewno są to zbiory gwiaździste. Główny wynik to oszacowania wykładnika Markowa dla zbiorów E_l w normach L_p:

$$l \leq \mu_p(E_l) \leq l+1, \ l = 3, 5, \ldots,$$

choć nie można uznać, że kandydat rzeczywiście uzasadnił górne oszacowanie. Ten fragment dysertacji wygląda, jak by został napisany wcześniej niż rozdział 3, z którego można wykorzystać kilka ważnych wyników. Oto szereg szczegółowych uwag.

Lematu 10 nie wypada dowodzić, to ćwiczenie dla studentów II roku. Wykorzystanie Twierdzenia 34 w dowodzie Lematu 11 jest całkowicie błędne. Ale lemat ten jest konsekwencją nierówności Bernsteina z pracy Mastroianniego i Totika [S75] dla wielomianów trygonometrycznych z wagą $\omega(\theta) = (\cos\theta \sin\theta)^{l-1}$ (do czasu pojawienia się tej przełomowej pracy za jeden z najlepszych wyników uchodziły rezultaty z (obecnie niedostępnej) pracy Khalilovej [10], por. [9], [S30]), która spełnia warunek podwójności, co mgr Sroka sprawdza na stronie 63. Zastosowanie twierdzenia 36 nie jest konieczne w dowodzie Lematu 12, bo zastosowanie własnej Propozycji 3 daje efektywne oszacowanie stałej B, np. $B \leq 4\sqrt[3]{e}8^p$. Również w dowodzie Lematu 14 zastosowanie wspomnianego twierdzenia 35 jest całkowicie błędne, potrzebna jest tylko wersja nierówności A. Markowa w normie L^p z wagą $|r|$, co zostało wykazane w Propozycji 2 z pracy

P. Goetghelucka [S57], znanej doktorantowi. Zastosowanie w dowodzie Twierdzenia 38 wyniku z pracy [S75] (zacytowanego jako twierdzenie 37) nie jest konieczne, bo potrzebne oszacowania wynikają z Twierdzenia 24 (jest to wynik, którego dokładnie potrzeba), poprzez przejście w odpowiedni sposób w nierównościach wagowych z wielomianów trygonometrycznych na wielomiany algebraiczne. Podsumowując, w obecnej wersji z pracy, oszacowanie górne $\mu_p(E_l) \leq l+1$ nie można uznać za uzyskane przez kandydata.

Być może uda się dopracować metodę G.Sroki i poprawić oszacowanie górne, ale na razie cenniejsze jest elementarne (ale nietrywialne) uzasadnienie oszacowania od dołu, które w tym przypadku oznacza, że poszukiwana wartość wykładnika Markowa w normie L^p jest co najmniej równa wykładnikowi w normie supremowej.

Wyżej oceniam, w tym samym rozdziale, poprawienie wyniku L. Białas-Cież i P. Goetghelucka dla stałej w nierówności A. Markowa dla sympleksu w $\mathbb{R}^2$, co wiąże się z trudnym tematem szukania wielomianów optymalnych dla nierówności Markowa i wykorzystaniem do tego metod numerycznych.

Najważniejsze wyniki dysertacji zawarte są w rozdziałach 2,3 i 4 i związane są z badaniem oszacowań dla k-tych pochodnych wielomianów. Nawet badanie n-tych pochodnych dla wielomianów stopnia n jest bardzo ważne i wiąże się z niepolarnością i niepluripolarnością zbiorów, co zostało odkryte w pracy L. Białas-Cież i przedwcześnie zmarłego Mieczysława Jędrzejowskiego [1].

W wielu zagadnieniach iterowanie oszacowań dla pochodnych pierwszego rzędu było wystarczające. Jednak już Władimir Markow pokazał, że precyzyjniejsze oszacowanie stałych w oszacowaniu $||P^{(k)}|| \leq C(k)n^{km}||P||$ może być znacznie lepsze niż wynikające z własności Markowa $C(k) \leq M^k$. Klasyczny wynik Władimira Markowa daje oszacowanie $C(k) \leq (1/2)^k/k!$. Wynik ten został przeniesiony na zbiory wypukłe w $\mathbb{R}^N$ przez W. Pleśniaka w jego pracy habilitacyjnej [12]. Wynik ten przeszedł bez echa, gdyż własność A. Markowa była wystarczająca. W ogólniejszej sytuacji zbiorów z własnością HCP odkrycie nierówności typu Władimira Markowa otarł się J. Siciak w pracy [21]. Jak już wspomnieliśmy wcześniej w roku 1990 W. Pleśniak w [13] postawił kilka ważnych problemów, wśród których było pytanie czy zbiory spełniające nierówność typu A. Markowa mają własność HCP. Dość niespodziewanie w roku 2013 ([S11]) okazało się, że własność HCP jest równoważna następującemu rodzajowi oszacowania dla pochodnych (ze stałymi dodatnimi A, m)

$$||D^\alpha P|| \leq A^{|\alpha|}\left(\frac{1}{k!}\right)^{m-1}(\deg P)^{m|\alpha|}||P||.$$

Ponieważ funkcję ekstremalną Siciaka można tak zmodyfikować aby w terminie funkcji ekstremalnej radialnej można było sformułować własność HCP, pojawił się naturalny problem kiedy zachodzi odpowiednik oszacowań typu Władimira Markowa w normach innych niż supremowa. Pierwszym nietrywialnym przypadkiem były normy w przestrzeni L^p na przedziale $[-1, 1]$. W takiej sytuacji, stosując istotną modyfikację mojej metody z [S8], mgr Sroka uzyskał piękną wersję nierówności Władimira Markowa w normie L^p, opublikowaną w prestiżowym czasopiśmie z teorii aproksymacji, jakim jest Journal of Approximation Theory. Jest to też treścią dysertacji. Ważną cechą tego wyniku jest fakt, że przy $p \to \infty$ nierówności Sroki przechodzą w nierówność W. Markowa, ale nie jest to sposób na otrzymanie tej słynnej nierówności, gdyż jest ona wykorzystywana do uzasadnienia wyniku kandydata. Warto nadmienić, że oszacowania typu W. Markowa, nie odwołujące się do klasycznej nierówności W. Markowa zostały uzyskane przez P. Ozorkę i M. Barana dla $1 \leq p \leq 2$ (opisane to jest w [S82] ale uzyskane zostało później niż G. Sroka) oraz w przypadku $p = 2$ wcześniej przez A. Böttchera i P. Dörflera w [2, 3]. Na zakończenie 2 rozdziału dysertacji udowodnionych jest kilka pożytecznych wniosków, w tym własność HCP dla norm L^p.

Metoda oszacowania normy operatora k-tej pochodnej wielomianów zastosowana w [S95] i dysertacji polega na faktoryzacji operatora

$$D^k : L^p(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), [-1,1]) \longrightarrow L^p(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), [-1,1])$$

na złożenie operatorów

$$\widetilde{D}^k : L^p(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), [-1,1]) \longrightarrow L^\infty(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), [-1,1])$$

oraz

$$I : L^\infty(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), [-1,1]) \longrightarrow L^p(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), [-1,1]).$$

Oszacowanie normy pierwszego operatora wykorzystuje klasyczną nierówność W. Markowa oraz wersję nierówności Bernsteina dla pochodnych wielomianu rzędu k w punktach przedziału $(-1,1)$. Wykorzystana w lemacie 2 wersja tej nierówności (zaczerpnięta z [S30]) została później poprawiona w rozdziale 4 w twierdzeniu 32. I jest to centralny wynik rozdziału 4, który wraz z Twierdzeniem 33 istotnie poprawia znany wcześniej wynik z [S30]. W dowodzie w pomysłowy sposób wykorzystywana jest modyfikacja radialna funkcji ekstremalnej przedziału $[-1,1]$.

Z kolei szacowanie operatora I to problem nierówności typu Nikolskiego, która dotyczy oszacowań między różnymi przestrzeniami L^p z różnymi wagami. Na nierówności Schura można również popatrzeć z takiej perspektywy.

Rozdział trzeci, zawierający wspólne wyniki kandydata i jego promotora, stanowi rozwinięcie 2 rozdziału, przy czym wykorzystywane są bardziej zaawansowane metody. Rozdział ten choć zawiera nowe i cenne wyniki, ma bardzo techniczny charakter, doceniany przez ludzi zajmujących się aproksymacją wielomianową. Dotyczą one, w różnych kontekstach, szacowania operatora D^k (również dla $k = 0$ czyli $D^0 = I$ działającego między przestrzeniami typu $L^p(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), [-1,1], w(x)dx)$ z róznymi k, p i $w(x)$. Propozycje 1,2, Twierdzenia 22, 23 dla wag Jacobiego oraz Propozycje 3,4, Twierdzenie 24 to różne wersje nierówności, które można określić wspólnie jako nierówności Schura lub Nikolskiego, do nich należą również oszacowania z Propozycji 5 i Twierdzenia 25. Wreszcie w podrozdziale 3.4 rozwinięte są, o czym już wspominaliśmy, idee z rozdziału 2 ale w znacznie ogólniejszej sytuacji. Jest to treścią twierdzeń 26 i 27 a cenne wnioski z nich wynikające zebrane są we wniosku 10. Rozdział ten wymagał olbrzymiej pracy, ale wydaje się, że po opublikowaniu wyniki rozdziału 3 będą często wykorzystywane przez wielu specjalistów. Chciałbym podkreślić ważną cechę oszacowań z tego rozdziału: na ogół są podane efektywne oszacowania stałych tam występujących. O możliwych zastosowaniach wyników rozdziału trzeciego pisałem przy okazji omawiania rozdziału piątego dysertacji.

Recenzent nie ma wątpliwości, że rozprawa zawiera nowe wyniki rozwiązujące pewne ważne problemy naukowe i pokazuje, że Autor opanował zaawansowany warsztat matematyczny, co zdaniem recenzenta oznacza spełnienie wymogów nakładanych na rozprawę doktorską przez Ustawę z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki (Dz. U. Nr 65, poz. 595) w artykule 13.1, przypomnianym na początku recenzji.

Wnosimy zatem o przyjęcie rozprawy doktorskiej mgr Grzegorza Sroki i dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Mirosław Baran

Mirosław Baran Tarnów, 1 marca 2017

Bibliografia

[1] L. Białas-Cież, M. Jędrzejowski, *Transfinite diameter of Bernstein sets in* $\mathbb{C}^N$, J. Inequal. Appl. 7 (3) (2002), 393–404.

[2] A. Böttcher, P. Dörfler, *Inequalities of the Markov type for partial derivatives of polynomials in several variables*, J. Integral Equations Appl. 23 (1) (2011),1–37.

[3] A. Böttcher, P. Dörfler, *On the best constants in Markov ptype inequalities involving Gegenbauer norms with different weights*, Oper. Matrices 5 (2) (2011), 261–272.

[4] Z. Dizian, V. Totik, *Moduli of Smoothness*, Springer-Verlag, (1987).

[5] P. Dörfler, *New inequalities of Markov type*, SIAM J. Math. Anal. 18 (2) (1987), 490–494.

[6] P. Dörfler, *A Markov type inequality for higher derivatives of polynomials*, Monatsch. Math. 109 (2) (1990), 113–122.

[7] P. Dörfler, *An extremal problem concerning a Markov-type inequality*, SIAM J. Math. Anal. 22 (3) (1991), 792–795.

[8] P. Dörfler, *Asymptotics of the best constant in a certain Markov-type inequality*, J. Approx. Theory 114 (1) (2002), 84–97.

[9] T. Erdélyi, *Wieghted Markov and Bernstein Type Inequalities for Generalized Non-negative polynomials*, J. Approx. Theory 68 (1992), 283–305.

[10] B.A. Khalilova, *On some estimates for polynomials*, Izv. Akad. Nauk Azerbhaidzhan SSR Ser. Fiz.-Tekhn. Mat. Nauk. 2 (1974), 46–55.[Russian]

[11] W. Pawłucki, W. Pleśniak, *Extension of* C^∞ *functions from sets with polynomial cusps*, Studia Math. 88 (1988), 279–287.

[12] W. Pleśniak, *Quasianalytic functions in the sense of Bernstein*, Dissertationes Math. 147 (1977).