Gdańsk, 30.11.2016 r.

dr hab. Zdzisław Dzedzej
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Politechnika Gdańska

Recenzja rozprawy doktorskiej
Pana mgra Piotra Brendela

Rozprawa nosi tytuł „ Algorytm podzbioru acyklicznego: rozszerzenia i zastosowania" i dotyczy obliczania grup homologii i grupy podstawowej przestrzeni.

Problematyka pracy należy do bujnie rozwijającego się w ostatnich latach pogranicza informatyki i matematyki w części zwanej topologią obliczeniową. Funktor homologii jest jednym z najstarszych i najbardziej efektywnych narzędzi topologicznych pozwalających na badanie własności przestrzeni i odwzorowań. Mówiąc w uproszczeniu, pozwala on mierzyć ilość dziur rozmaitego wymiaru w przestrzeni, a odwzorowanie indukowane przez odwzorowanie ciągłe daje pewne informacje o jego dynamice, to znaczy np. jak się ono „nawija" wokół tych dziur. Topologia wystartowała z zastosowań (H. Poincaré) i teraz do nich powraca (rozpoznawanie obrazów, robotyka, analiza białek, itd...), między innymi dzięki nowym narzędziom obliczeniowym z użyciem komputerów. Od wielu lat krakowska grupa kierowana przez profesora Mariana Mrozka uczestniczy z sukcesami w badaniach własności zbiorów niezmienniczych dla układów dynamicznych (teoria Conley'a) ze wspomaganiem komputerowym. Efektem są m.in. metody obliczania homologii dla zbiorów „pudełkowych" w $\mathbb{R}^n$, część z nich opisano w monografii T. Kaczyńskiego, K. Mischaikowa i M. Mrozka „Computational Homology" z 2004 roku. W prezentowanej rozprawie przedstawiono pewne algorytmy pozwalające przyspieszyć obliczenia grup homologii przestrzeni poprzez redukcję danych wejściowych (rozdział 2). Zaprezentowano także algorytm do obliczania grupy podstawowej przestrzeni w postaci prezentacji generatorów i relacji, a także jego zastosowanie do klasyfikacji węzłów.

Zawartość pracy

Tekst rozprawy liczy 110 stron, Składa się ze wstępu, czterech rozdziałów i dwóch dodatków. Dołączono też płytkę z programami. Z racji mojej

ZD

niekompetencji nie będę robił żadnych uwag na temat tej ostatniej części, ograniczając się do tekstu pisanego.

We wstępie opisano pokrótce ideę grup homologii i uzasadniono potrzebę stosowania algorytmów redukcyjnych w obliczeniach, a także wymieniono szczegółowo te części pracy, które Autor uznaje za jego własny wkład.

Rozdział pierwszy zawiera matematyczne wprowadzenie. Przypomniano pojęcie CW-kompleksu, kompleksu symplicjalnego, grupy podstawowej. Następnie dość szczegółowo opisano konstrukcję grup homologii symplicjalnych i niektóre z ich własności. To jest standardowy materiał podręcznikowy. Nieco nowsze są homologie kostkowe opisane na podstawie wyżej wspomnianej pozycji T. Kaczyńskiego, K. Mischaikowa i M. Mrozka . Na koniec przytoczono z niej fakty niezbędne do algebraicznego wyznaczenia grup homologii wolnego kompleksu łańcuchowego. Idea polega na doprowadzaniu macierzy całkowitoliczbowych reprezentujących homomorfizmy brzegu do tzw. postaci normalnej Smitha. W tej części Autor nie ma żadnych pretensji do oryginalności.

Zasadnicza część pracy dotycząca obliczania homologii jest zawarta w rozdziale drugim. Jest to jedyna część z dowodami. Pierwsza część tego rozdziału poświęcona jest budowie możliwie największego podkompleksu acyklicznego. Wtedy homologie całego kompleksu można liczyć jako homologie relatywne (lemat 2.1), co zmniejsza ilość zaangażowanych sympleksów, bo można stosować własność wycinania. Idea jest bardzo prosta: startujemy od pojedynczego sympleksu i stopniowo doklejamy kolejne pilnując, aby w efekcie w każdym kroku otrzymać kompleks acykliczny. Używając ciągu Mayera-Vietorisa łatwo podać warunek wystarczający: przekrój nowego sympleksu z dotychczas zbudowanym kompleksem ma być acykliczny. Procedura jest skończona, bo rozważamy skończone kompleksy. Można ją robić jednocześnie budując kilka składowych acyklicznych, a potem próbować je sprytnie połączyć. I tak mniej więcej działa algorytm zwany przez Autora „klasycznym" zaprezentowany w cytowanej pracy M. Mrozka, P. Pilarczyka i N. Żelaznej z roku 2008 (poz. [33]) dla kompleksów kostkowych. Jego wersję dla kompleksów symplicjalnych oraz modyfikacje zawiera wspólna praca P. Brendela, P. Dłotko, M. Mrozka i N. Żelaznej z roku 2012 (poz. [5]). Według Autora, większość wyników tego rozdziału pochodzi z tej pracy.

W podrozdziale 2.3 zaprezentowano pewne modyfikacje „klasycznego" algorytmu motywując to prostymi przykładami sytuacji(rys. 2.1- 2.3), gdy klasyczny algorytm (w pracy Algorytm 2.2), nieco zbyt szybko się zatrzyma. Nie wchodząc w detale, Autor koncentruje się tu na części „sprytnie połączyć". Proponuje pewne procedury, pozwalające zbudować trochę większy podkompleks acykliczny (Algorytmy 2.6 i 2.7). Oszczędność polega tu głównie ma tym, że podkompleks budujemy używając tylko sympleksów maksymalnego wymiaru (topleksów), a następnie łączymy je za pomocą ścieżek zbudowa-

ZD

nych z jednowymiarowych krawędzi. Dość ważnym ograniczeniem może być konieczność wielokrotnego badania acykliczności przecięć podczas doklejania sympleksów. W niskch wymiarach pomocne bywa używanie tablic pamiętających możliwe przecięcia. W wyższych wymiarach staje się to beznadziejne. W związku z tym trzeba uciekać się do różnych testów częściowych, począwszy od najprostszych obserwacji, że gwiazda sympleksu jest kompleksem acyklicznym. Chodzi o unikanie pełnego obliczania homologii takich częściowych podkompleksów. Jak zrozumiałem, Autor takie urozmaicenie stosuje.

Zaprezentowano też algorytmy (Algorytm 2.12) pozwalające na zastosowanie obliczeń rozproszonych. W poszczególnych częściach używa się tu pewnych standardowych algorytmów lub ich małych modyfikacji.

W podrozdziale 2.6 znajdujemy uwagi na temat implementacji algorytmów i sposobów oszczędzania pamięci i przyspieszania obliczeń. Na koniec zaprezentowano na kilku przykładach wyniki działania opisanych algorytmów i porównanie z algorytmem opartym na koredukcjach. Dane dotyczące triangulacji zaczerpnięto z jednego ze źródeł dostępnych w internecie. Na jednym z przykładów porównano też czasy obliczeń i rozmiary kompleksów (ilość topleksów) po kolejnych podziałach barycentrycznych. Jeśli chodzi o zależność złożoności od wymiaru kompleksów, testowano tylko sfery, co nie wydaje się zbyt miarodajne.

Rozdział 3 zawiera opis algorytmu pozwalających obliczać grupę podstawową dla pewnej klasy CW-kompleksów w postaci generatorów i relacji. Materiał pochodzi z artykułu P. Brendela, P. Dłotko, G. Ellisa, M. Judy i M. Mrozka z r. 2015 (poz. [4]) oraz preprintu tychże autorów (bez P. Dłotko).

Algorytm opiera się tu na dyskretnej teorii Morse'a autorstwa R. Formana [15] z 1998 roku. Przytoczono (bez dowodów) odpowiednie twierdzenia opisujące algorytmy typu redukcyjnego, opierające się na „zgniataniu" komórek, tak by operacje te prowadziły do homotopijnie równoważnych mniejszych kompleksów. Jak pisze Autor, jego rolą była tutaj implementacja algorytmu 3.18. Jego skutaczność opiera się na obserwacji (Twierdzenie 3.14), że dla rozważanej klasy kompleksów grupa podstawowa zależy tylko od 2-wymiarowego szkieletu i jest generowana przez 1-komórki. Relacje pochodzą od brzegów 2-komórek. Zastosowano ten algorytm do obliczania grup węzłów, czyli $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K$, w rzeczywistości zastępując $\mathbb{R}^3$ dużą kostką, a węzeł K jego otoczeniem kostkowym. Następnie za pomocą innego oprogramowania (poz. [14]) obliczono pewien niezmiennik algebraiczny $I^n(K)$. Sprawdzono, że w ten sposób można sklasyfikować wszystkie węzły z bazy Hoste'a, Thistlethwaite'a i Weeksa z ilością przecięć do 14 (W [4] było do 11).

Króciutki rozdział 4 zawiera kilka uwag na temat ewentualnych dalszych prac nad rozwinięciem prezentowanych technik.

W dodatku A przedyskutowano notację w zapisie algorytmów , w dodatku

ZD

B są wskazówki na temat instalacji i uruchomienia załączonych programów, czego nie próbowałem czynić.

Ocena poprawności, wkładu pracy Autora

Prezentowana praca dotyczy w zasadzie informatyki zastosowanej do zagadnienia matematycznego. Matematyczne wprowadzenie w rozdziale 1 jest napisane na ogół poprawnie, poza drobnymi usterkami i nielicznymi przejęzyczeniami. Np. w twierdzeniu 1.13 odwzorowanie π_n jest indukowane przez inkluzję $(S, \emptyset) \subset ((S, T)$, a nie jakąś projekcję. Na stronie 29 kostki są raczej zawarte jako podzbiory zbioru kostkowego X , a nie należą do X. Na stronie 30 grupa $C_n(X)$ jest generowana przez łańcuchy elementarne i jest to po prostu grupa łańcuchów.

Trochę matematyki jest w rozdziale 2. W dowodzie lematu 2.1 dla $n = 1$ trzeba użyć innego argumentu, bo $H_0(A) = \mathbb{Z}$. W dowodzie Twierdzenia 2.3 Φ_0 nie jest izomorfizmem tylko monomorfizmem. W części 2.3.1 poza wymienionymi lematami i algorytmami to już prawie nic nie zostaje. Przedstawione rozumowania wydają mi się przekonujące. Ponieważ nie jestem specjalistą od informatyki, to nie bardzo wiem, czy można byłoby przedstawione algorytmy mocno ulepszyć. Mam wrażenie, że Autor sprawnie posługuje się dostępnymi narzędziami informatycznymi. Oczywiście pojawia sie tu naturalny problem wyłącznego autorstwa wskazanych fragmentów pracy, jeśli materiał został w dużej części zaczerpnięty ze wspólnej pracy kilku autorów. Jedyne, co mogę stwierdzić na pewno to fakt, że Autor panuje nad tematem.

Trochę brakuje mi porównania z efektami pracy innych zespołów, bo przecież chyba rozważane algorytmy nie są jedyne w literaturze przedmiotu ? A bez wyrzucania tego podkompleksu acyklicznego , jak szybko policzymy homologie i o ile więcej pamięci użyjemy ? Na pewno sporo więcej, ale konkretów nie ma.

W rozdziale 3 Autor swój udział zgłasza tylko w części dotyczącej implementacji, a na tym się nie znam. Jednakże w recenzji Jonathana Spreera w Mathematical Reviews pracy [4] znalazłem sporo uwag i wskazówek bibliograficznych. Chętnie usłyszałbym komentarz Autora na ten temat. Oczywiście nie traktuję mojej sugestii jako krytykę, raczej jest to dowód, że temat jest interesujący.

Jeśli chodzi o cytowanie literatury, są pewne niekonsekwencje. Najbardziej podoba mi się konkretne: typu 35, Twierdzenie 18.1]. Ale czasami mamy tylko ogólne [21], co może budzić podejrzenia, czy to naprawdę tam jest (jak nie ma numeru tw. to mogłaby być strona).

Drobnych błędów literowych też trochę znalazłem, ale ich nie wymieniam, bo nie mają dużego wpływu na czytanie tekstu. Na koniec dorzucam garść

ŻD

przecinków, których Autor używa nad wyraz oszczędnie: „,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,".
Moje drobne uwagi nie podważają pozytywnej oceny pracy.

Konkluzja

Uważam, że prezentowana rozprawa odpowiada wymaganiom stawianym rozprawom doktorskim. Autor wykazał się umiejętnoscią rozwiązywania problemów naukowych, formułowania rezultatów i dowodzenia tez. Dlatego wnioskuję do Rady Wydziału Matematyki i Informatyki o przyjęcie rozprawy i o dopuszczenie jej Autora, mgra Piotra Brendela, do jej publicznej obrony.

Zdzisław Dzedzej