Ocena
rozprawy habilitacyjnej dr. Rafała Pierzchały

Rozprawa habilitacyjna Rafała Pierzchały nosi tytuł **"Zastosowania teorii zbiorów subanalitycznych i definiowalnych do nierówności wielomianowych i aproksymacji wielomianowej"**. Składają się na nią następujące (samodzielne) prace habilitanta:

[P.1] *Markov's inequality and polynomial mappings*, Math. Ann., Band 363, Heft 1-2, October 2015 (DOI 10.1007/s00208-015-1294-9);
[P.2] *Remez-type inequality on sets with cusps*, Adv. Math. 281 (2015) 508-552;
[P.3] *Approximation of holomorphic functions on compact subsets of* $\mathbb{R}^N$, Constr. Approx. 41 (2015) 133-155;
[P.4] *Markov's inequality in the o-minimal structure of convergent generalized power series*, Adv. Geom. 12 (2012) 647-664;
[P.5] *Siciak's extremal function of non-UPC cusps* I, J. Math. Pures Appl. 94 (2010) 451-469.

Powyższy cykl prac dotyczy bardzo szerokiego zbioru zagadnień z zakresu wielowymiarowej aproksymacji wielomianowej, ciągłości funkcji ekstremalnej Siciaka (co wiąże się z teorią pluripotencjału) i teorii struktur o-minimalnych (istotnie uogólniającej geometrię subanalityczną Gabriełowa-Hironaki-Łojasiewicza). Ich przegląd zacznę od wyników pracy [P1], która dotyczy wielowymiarowej wersji klasycznej nierówności A.A. Markowa, szacującej na przedziale $[-1, 1]$ pochodną wielomianu P przez jego normę jednostajną na [-1,1] przemnożoną przez kwadrat stopnia tego wielomianu. Markow udowodnił ją (w dalece nietrywialny sposób) w roku 1889 odpowiadając na postawione dwa lata wcześniej pytanie Mendelejewa. Okazało się, że ta nierówność ma liczne zastosowania w różnych działach matematyki i fizyki, stąd fascynacja nią i jej licznymi uogólnieniami nie słabnie do dziś. Rafała Pierzchałę, podobnie jak wielu obecnie specjalistów z teorii aproksymacji, interesuje wielowymiarowa jej wersja w postaci oszacowania normy jednostajnej pochodnych cząstkowych wielomianu $P \in \mathbb{C}[Z_1, \ldots, Z_N]$ w kształcie

$$\|D^\alpha P\|_E \leq (C(\deg P)^\epsilon)^{|\alpha|} \|P\|_E,$$

gdzie E jest podzbiorem zwartym przestrzeni $\mathbb{K}^N$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$), a stałe dodatnie C i ϵ nie zależą od P i α. Pięknym rezultatem pracy [P1] jest następująca własność zachowania nierówności Markowa: jeśli zbiór zwarty $E \subset \mathbb{K}^N$ jest zbiorem Markowa (tzn. zachodzi na nim nierówność Markowa), zaś $h : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^M$ ($M \leq N$) jest odwzorowaniem wielomianowym takim, że rank $h := \max\{\operatorname{rank} d_\zeta h : \zeta \in \mathbb{K}^N\} = M$, to również $h(E)$ jest zbiorem Markowa. Twierdzenie to uogólnia wynik Barana-Pleśniaka z roku 1995, uzyskany przy bardziej krępującym założeniu, że $\operatorname{Jac} h(\zeta) \neq 0$ dla $\zeta \in \operatorname{Int} E$ i dla zbiorów typu UPC (są to zbiory o ostrzach wielomianowych z jednostajnym oszacowaniem ich "cienkości", wprowadzone w pracy [84]). Habilitant o tym nie pisze, ale w moim przekonaniu wynik ten jest ważny również (a może głównie) z następującego powodu. Zachodzenie nierówności typu Bernsteina-Walsha na zbiorze zwartym E w $\mathbb{C}^N$ lub inaczej własność L-regularności zbioru E, a więc ciągłość funkcji ekstremalnej Siciaka (definicję przytaczam później, zob. też autoreferat Habilitanta), pozwala z szybkością geometryczną aproksymować kiełki funkcji holomorficznych na E wielomianami. Przed laty pokazałem (TAMS, 1978), że własność ta zachowuje się przy niezdegenerowanych odwzorowaniach holomorficznych h (maksymalność rzędu h). W analogiczny sposób, nierówność Markowa jest odpowiedzialna za szybko malejącą aproksymację wielomianami funkcji klasy C^∞ na zbiorach zwartych E w $\mathbb{R}^N$ (prace Pawłuckiego- Pleśniaka). Zatem wynik Pierzchały w pełni kompletuje tę paralelę. Następnym ważnym rezultatem tej pracy jest Theorem 5.1 i wynikający z niego wniosek (Corollary 5.2), zgodnie z którym jeśli zbiór zwarty, wielomianowo wypukły $E = E_1 \cup E_2$, gdzie $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ i oba E_j są niepluripolarne, jest zbiorem Markowa, to również każdy E_j jest też zbiorem Markowa. Habilitant prawdopodobnie nie wie, że jest to pozytywna odpowiedź na pytanie postawione w 2010 roku przez Leokadię Białas-Cież, który to problem rozwiązałem (rozumując podobnie jak Pierzchała), w szczególnym przypadku zbioru $E \subset \mathbb{R}$, za to bez zakładania niepolarności zbiorów E_j.[1]

Jednym z klasycznych narzędzi w teorii aproksymacji jest nierówność Remeza z roku 1936: jeśli $S \subset [0,1]$ jest zbiorem mierzalnym o mierze $|S| > 0$, to dla dowolnego wielomianu $P \in \mathbb{R}[X]$ jednej zmiennej o stopniu $\deg P \leq n$ mamy

$$\|P\|_{[0,1]} \leq T_n\left(\frac{2-|S|}{|S|}\right)\|P\|_S,$$

gdzie $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ $(x \in [-1,1])$ jest n-tym wielomianem Czebyszewa I rodzaju. Jako ciekawostkę można tu dodać, że tego typu nierówność wynika też ze znanego lematu wielomianowego Leji, opublikowanego również w 1936 roku w Mathematische Annalen (krótki dowód podali Białas-Cież i Pleśniak - nieopublikowane). W pracy [P2] Habilitant zajmuje się wielowymiarową wersją nierówności Remeza i pokazuje, że dla każdego niepustego, zwartego zbioru $B \subset \mathbb{R}^N$ z własnością *specjalnej parametryzacji* SPP (jak się okazało, bardzo naturalne, choć technicznie trudne, pojęcie wprowadzone przez Pierzchałę), to istnieją stałe $\epsilon > 0$ i $l \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego wielomianu $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_N]$ stopnia $\leq n$ i każdego zbioru mierzalnego $S \subset B$ jest

$$\|P\|_B \leq T_{nl}\left(\frac{1+(1-\lambda)^\epsilon}{1-(1-\lambda)^\epsilon}\right)\|P\|_S,$$

o ile $\lambda := |S|/|B| > 0$. Jest to piękny rezultat, uogólniający m.in. podobną nierówność Brudnyia-Ganzburga dla ciał wypukłych B. Aby go uzyskać Pierzchała stosuje w sposób nietrywilny zaawansowane techniki z *teorii struktur o-minimalnych*. Ta burzliwie rozwijająca się od ponad 30 lat teoria, której początki tworzyli logicy, głównie van den Dries, jest daleko idącym uogólnieniem geometrii subanalitycznej Gabriełowa-Hironaki-Łojasiewicza. Przy pomocy tych metod, autor dowodzi bardzo subtelnego oszacowania dla obrazu $F_a(A)$ zbioru mierzalnego $A \subset [0,1]^N$ poprzez odwzorowanie $F_a := F(a,\cdot) : [0.1]^N \to \mathbb{R}^N$, gdzie $F : Z \times [0,1]^N \to \mathbb{R}^N$ $(Z \subset \mathbb{R}^{N'})$ jest odwzorowaniem definiowalnym w pewnej strukturze o-minimalnej, postaci

$$|F_a(A)| \geq M|A|^\sigma,$$

[1] W.Pleśniak, *On compact subsets of a Markov set*, presented to the Seminar on Approximation Theory, Jagiellonian University, Kraków, Faculty of Mathematics and Computer Science, January 20, 2010.

z odpowiednimi stałymi $M, \sigma > 0$.

Należy dodać, że rodzina zbiorów z własnoscią SPP jest bardzo obszerna. Stosunkowo nietrudno pokazać ([P2], Lemma 3.8), że każdy zwarty zbiór UPC Pawłuckiego-Pleśniaka jest SPP, przy czym ta inkluzja jest ostra (przykład w [P2]). Dalej, w pracy [P4] pokazano (Theorem 4.1), że każdy zbiór zwarty, tłusty i definiowalny w strukturze o-minimalnej $\mathcal{S}$, która jest podstrukturą struktury $\mathbb{R}_{an^*}$ van den Driesa-Speisseggera zbieżnych uogólnionych szeregów potęgowych, jest zbiorem UPC. Podobnie, w pracy [R7] autor pokazał, że własność UPC mają też zbiory zwarte, tłuste definiowalne w strukturze $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ Rolina-Speissegera-Wilkiego, modelowanej na pewnej podklasie funkcji silnie quasi-analitycznych w sensie Denjoy-Carlemana. Tak więc, obie wymienione struktury o-minimalne dostarczają licznych przykładów zbiorów z parametryzacją SPP. Ze swojej wersji nierówności Remeza Pierzchała wyprowadza w pracy [P2] ciekawe wnioski dotyczące oszacowania funkcji ekstremalnej Siciaka dla zbiorów zwartych w $\mathbb{R}^N$ z własnością SPP oraz zachowania się ciągu odległości $E_n(h,S)$ (mierzonych w normie jednostajnej na S) funkcji h ciągłej na zbiorze zwartym B w $\mathbb{R}^N$, nieprzedłużalnej $\mathbb{R}$-analitycznie w żadne otoczenie (w $\mathbb{R}^N$) zbioru B, od podprzestrzeni wielomianów stopnia $\leq n$, gdzie S jest L-regularnym podzbiorem zwartym zbioru B, czyli takim, że funkcja ekstremalna Siciaka dla S jest ciągła (na S, a w konsekwencji w $\mathbb{C}^N$). Szczególnie interesującą konsekwencją jest też ([P2], Corollary 1.8) wersja dla zbiorów SPP znanego oszacowania Bourgaina

$$\left(\int_B |P(x)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq const(n,r)\int_B |P(x)|dx$$

dla ciała wypukłego $B \subset \mathbb{R}^N$ i wielomianu $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_N]$ stopnia $\leq n$ (szczegóły w pracy [P2]). Wynikają stąd również ważne w teorii aproksymacji oszacowania, nazywane w literaturze nierównościami typu Nikolskiego, porównujące normy $L_{q'}$ i L_q $(1 \leq q \leq q' \leq \infty)$ wielomianu $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_N]$ w zależności od jego stopnia.

Przypomnijmy, że funkcja ekstremalna Siciaka Φ_K zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}^N$ wyraża się wzorem

$$\Phi_K(z) = \sup\{|P(z)|^{1/\deg P} : \ P \in \mathbb{C}[z],\ P(z) \not\equiv const., \|P\|_K \leq 1\}$$

dla $z \in \mathbb{C}^N$. Dzięki Zachariucie wiadomo, że

$$\log \Phi_K(z) = V_K(z) := \sup\{u(z) : \ u \in (\mathbb{C}^N),\ u(z) \leq 0,\ z \in K\},$$

gdzie $\mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ jest klasą Lelonga funkcji plurisubharmonicznych w $\mathbb{C}^N$ takich, że $\sup\{u(z) - \log\|z\|\} < \infty$. Okazało się (Bedford-Taylor), że jeśli K jest niepluripolarny, to regularyzacja górna $V_K^*(z) := \limsup_{w\to z} V_K(w)$ funkcji V_E spełnia równanie jednorodne Monge'a-Ampère'a, które dla $N = 1$ redukuje się (z dokładnością do stałego mnożnika) do równania Laplace'a. Zatem funkcja V_K^* jest wielowymiarowym odpowiednikiem funkcji Greena z biegunem w ∞. Słynne twierdzenie Siciaka (uogólniające jednowymiarowe twierdzenie Bernsteina-Walsha, a równocześnie istotnie precyzujące znane w analizie zespolonej twierdzenie Oki-Weila) charakteryzuje w języku funkcji Φ_K kiełki funkcji holomorficznych na K. Dokładniej, jeśli K jest L-regularny, to funkcja ciągła $h : \ K \to \ \mathbb{C}$ jest kiełkiem funkcji holomorficznej wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(h,K)} < 1$. Praca [P3] habilitanta poświęcona jest wariacjom na ten temat dla zbiorów zwartych K w $\mathbb{R}^N$. Podstawą jest tutaj zaskakujący rezultat

([P3], Theorem 1.1): istnieje stała $\epsilon_N > 0$, zależna jedynie od wymiaru N taka, że dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^N$, $\sharp K \geq 2$, mamy

$$\Phi_K(z) \geq 1 + \frac{\epsilon_N}{\operatorname{diam} K} \operatorname{dist}(z; K), \quad z \in \mathbb{C}^N.$$

Na mocy twierdzenia Weierstrassa każdy zbiór zwarty w przestrzeni $\mathbb{R}^N$ (traktowanej jako część rzeczywista przestrzeni $\mathbb{C}^N$) jest wielomianowo wypukły. Zatem wynik Pierzchały oznacza, że każdy co najmniej 2-punktowy zbiór zwarty K w $\mathbb{R}^N$ spełnia nierówność Łojasiewicza-Siciaka z wykładnikiem 1. Nierówność ta była ostatnio intensywnie badana, m.in. przez Białas-Cież i Kosek. Powodem jest piękny rezultat Gendre'a z jego pracy doktorskiej (obronionej kilka lat temu w Université Paul Sabatier de Toulouse), opublikowany ostatnio w Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 353 (2015)(wspólnie z dwoma marokańskimi matematykami), charakteryzujący na zbiorach zwartych $K \subset \mathbb{C}^N$, zachowujących nierówność Łojasiewicza-Siciaka, funkcje f klasy Gevrey w terminach szybkości (typu ρ^{n^s} $(0 < \rho, s < 1)$ zbieżności do zera ciągu $\{E_n(f, K)\}$. Taka charakteryzacja była poprzednio znana jedynie dla kuli w $\mathbb{R}^N$ (wynik Baouendiego-Goulaouica z lat '70 ubiegłego wieku). Na uwagę w pracy [P3] zasługuje także Theorem 7.4 łącznie z wnioskiem (Corollary 7.5), w którym znajdujemy nieznaną wcześniej charakteryzację własności HCP zbiorów zwartych w $\mathbb{R}^N$ (czyli ciągłości typu Höldera funkcji ekstremalnej Φ_K) w terminach zbieżności ciągu $\{E_n(h, K)\}$ dla funkcji h na K, które nie są kiełkami funkcji holomorficznych. Jedyna moja uwaga do tej pracy: przykład zbioru, który jest L-regulany, ale nie jest zbiorem Markowa, a więc nie może być zbiorem HCP, $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \exp(-x^{-1}),\ x \in (0.1]\} \cup \{(0.0)\}$, pierwszy podał M. Zerner [*Développement en séries de polynômes orthonormaux des fonctions indéfiniment différentiables*, C.R. Acad. Sci. Paris 268 (1969), 218-220] i tę pracę należało zacytować zamiast pracy [84] Pawłuckiego-Pleśniaka.

W pracy [93] pokazałem, że ograniczone, tłuste zbiory subanalityczne w $\mathbb{R}^N$ są L-regularne, skąd w szczególności otrzymałem L-regularność wielościanów analitycznych w $\mathbb{C}^N$, czego poprzednio znanymi metodami nie udało się uzyskać. Kluczową rolę odegrało tam kryterium osiągalności semianalitycznej punktów zbioru, twierdzenie Puiseux oraz fakt, że odcinek $[a, b] \subset \mathbb{C}$ jest niecienki (w sensie teorii potencjału). Niestety, ta metoda zawodzi w przypadku ostrzy typu

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^\alpha \leq y \leq \delta x^\alpha,\ x \in [0.1]\},$$

gdzie $\delta > 1$, gdy α jest niewymierne. W pracy [P5] Rafał Pierzchała wprowadza metodę, która pozwala w szczególności wykazać L-regularność powyższego zbioru E. Pokazuje tym samym, że w pewnych (wielomianowo ograniczonych) strukturach o-minimalnych, w tym przypadku w strukturze van den Driesa-Speisseggera zbieżnych uogólnionych szeregów potęgowych, istnieją zbiory L-regularne, które nie są UPC. Metoda Pierzchały polega na sprytnym zastąpieniu kryterium osiągalności semianalitycznej warunkiem (Λ), który jest równoważny L-regularności w punkcie oraz "pozbyciu się" niewymierności wykładnika α (z definicji zbioru E powyżej) przez jego aproksymację liczbami wymiernymi (lemat Dirichleta). Mam tutaj pewne uwagi. Dla Czytelnika obeznanego z elementami teorii pluripotencjału wniosek [P5, Corollary 2.8] jest oczywisty, bowiem z założeń wynika, że zbiór K jest niepluripolarny, a więc funkcja ekstremalna V_K^* jest plurisubharmoniczna w $\mathbb{C}^N$. W rezultacie, jej złożenie z odwzorowaniem γ jest subharmoniczne i wystarczy teraz wykorzystać fakt, że odcinek [0,1] jest niecienki. Z kolei Theorem 2.9 (o niezmienniczości warunku (Λ) przy niezdegenerowanych deformacjach wielomianowych) jest prostym wnioskiem z (ogólniejszego) twierdzenia o niezmienniczości L-regularności z cytowanej pracy [92]. Prawdopodobnie autor chciał powiązać konsekwentnie te fakty ze swoim warunkiem (Λ), ale brak odniesień, o których wspomniałem, może zdezorientować "pluripotencjalnego" Czytelnika.

Warto odnotować inne jeszcze zastosowania warunku (Λ). Jednym z nich jest ciekawe kryterium L-regularności zbioru zwartego E w $\mathbb{R}^N$ w punkcie $z_0 \in E$ osiąganym z wnętrza zbioru E łukiem quasi-analitycznym w sensie Bernsteina ([P5], Proposition 3.5). Dodajmy, że funkcje quasi-analityczne Bernsteina na przedziale [0,1] mogą nie mieć pochodnej w żadnym punkcie (i jest takich funkcji "rezydualnie wiele" w przestrzeni Banacha funkcji ciągłych na [0,1], co pokazał Mazurkiewicz w latach '30 ubiegłego wieku).

Inne zastosowanie warunku (Λ) znalazł Habilitant w problemie związanym z przykładem Sadullajewa z 1980 roku: istnieją ograniczone obszary $E \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$ z brzegiem klasy C^∞ za wyjątkiem jedynego punktu $a \in \partial E$, który jest osiągalny przez krzywą klasy C^∞ $h: [0.1] \ni t \to h(t) \in \mathbb{R}^2$ taką, że $h((0,1]) \subset E$ i $h(0) = a$, która jest pluricienka w a, a stąd zbiór $\overline{E}$ nie może być L-regularny w punkcie a, chociaż jest L-regularny w $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ jako zbiór Jordana na płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$. W ten sposób Sadullajew odpowiedział (negatywie) na pytanie stawiane kilka lat wcześniej przez Siciaka. Dodajmy, że taki przykład można skonstruować nawet z krzywą h klasy C^∞, która jest quasi-analityczna w sensie Denjoy-Carlemana (zob. [96]). W związku ze swoim przykładem Sadulajew postawił pytanie: czy wykres funkcji $h_\alpha: [0,1] \ni x \to x^\alpha$ jest pluricienki w $(0,0) \in \mathbb{C}^2$, jeśli α jest niewymierne? Na to trudne pytanie odpowiedzieli pozytywnie Levenberg i Poletsky dopiero w 1999 roku. Okazuje się jednak ([P5], Corollary 4.7), że dla każdej funkcji ciągłej $\phi: [0,1] \to \mathbb{R}$ takiej, że $\phi > 0$ na $(0,1]$ i dla dowolnych $0 < \zeta < \theta$ istnieje niewymierne $\alpha \in [\zeta, \theta]$ takie, że zbiór

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y - x^\alpha| \leq \phi(x),\ x \in [0,1]\}$$

spełnia warunek (Λ) w punkcie $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, a więc jest w tym punkcie L-regularny. Co więcej, zbiór takich wykładników α jest nieprzeliczalny.

Mnogość i waga rezultatów zawartych w rozprawie habilitacyjnej Rafała Pierzchały, które w skrócie omówiłem dokonując przy tym koniecznego i subiektywnego wyboru, zwalniają mnie z potrzeby oceniania wyników jego pozostałych prac, choć i tam wiele jest pięknych i bardzo ważnych rezultatów. Wyjątek zrobię dla niezwykle cennej pracy [R7], obejmującej niektóre wyniki z rozprawy doktorskiej Habilitanta (wyróżnionej nagrodą Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki UJ). Jednym z jej rezultatów jest Theorem A: każdy zbiór ograniczony, tłusty i definiowalny w strukturze o-minimalnej $\mathbb{R}_C$ Rolina-Speisseggera-Wilkiego jest UPC, a stąd jest zbiorem Markowa. Jest to pozytywne rozwiązanie problemu postawionego przeze mnie w pracy [96], z którym nie mogłem się wówczas uporać. Potrafiłem jedynie wykazać L-regularność takich zbiorów oraz punktową własność Markowa. Istotnie silniejszy rezultat mógł Rafał Pierzchała uzyskać dzięki dogłębnej znajomości teorii struktur o-minimalnych. W moim przekonaniu, właśnie na bazie tej pracy zbudował Rafał

Pierzchała aparat pozwalający mu przy pomocy (wielomianowo ograniczonych) struktur o-minimalnych atakować z sukcesem zagadnienia z pogranicza wielowymiarowej aproksymacji wielomianowej i teorii pluripotencjału, wobec których metody wypracowane wcześniej przez Pawłuckiego-Pleśniaka na bazie geometrii subanalitycznej były bezradne. Jest to, moim zdaniem, wybitne osiągnięcie naukowe Habilitanta.

Rafał Pierzchała jest już w pełni ukształtowanym, dojrzałym matematykiem, o dużym doświadczeniu we współpracy z zagranicznymi ośrodkami i ze znacznym odzewem swojej twórczości. Był m.in. wielokrotnie wyróżniany za swoje wyniki stypendiami MEN i nagrodami Dziekana lub Rektora w Uniwersytecie Jagiellońskim. Kończące się obecnie jego 2.letnie stanowisko badawcze adiunkta w Instytucie Matematycznym PAN w Warszawie pozwoliło mu istotnie skonsolidować warsztat naukowy. Uczestniczył w wielu międzynarodowych i krajowych projektach badawczych. Ma też poważne już osiągnięcia w pracy dydaktycznej i organizacyjnej.

Rezultaty zawarte w rozprawie habilitacyjnej dr. Rafała Pierzchały wypełniają z dużą nadwyżką wymogi stawiane w ustawie z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki. Dlatego z pełnym przekonaniem stawiam wniosek o dopuszczenie dr. Rafała Pierzchały do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego. Ponadto uważam, że jego rozprawa zasługuje na wyróżnienie rangi nagrody Prezesa Rady Ministrów, bądź Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Wiesław Pleśniak
profesor (emeritus) UJ

Kraków, dnia 14 marca 2016 roku